

# Obliczanie prądów wirowych indukowanych w materiale przewodzącym

*Krzysztof Stawicki*

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

## 1. Wprowadzenie

Prądy wirowe zostały odkryte w połowie XIX wieku przez francuskiego fizyka Jeana Bernarda Foucaulta (1819-1868). Pod koniec XIX i na początku XX wieku zaczęto je wykorzystywać m.in. w hamulcach elektromagnetycznych, licznikach i w grzejnictwie indukcyjnym. Pierwsze doniesienia o wykorzystaniu prądów wirowych do badania materiałów pochodzą od amerykańskich wynalazców: pioniera telekomunikacji Aleksandra Grahama Bella (1847-1922) i profesora Dawida Edwarda Hughesa (1831-1900) [2]. Hughes w 1879 roku opublikował pracę z wynikami eksperymentów pokazujących możliwość wykrywania różnic przewodności, przenikalności i wymiarów obiektów przewodzących po wzbudzeniu w nich prądów wirowych. W latach 1937 – 1939 konstrukcją wysokoczułych przyrządów do pomiaru pól magnetycznych, zainteresował się niemiecki fizyk Friedrich Förster (1908-1999). W założonym przez niego instytucie naukowym w Reutlingen rozwinięto m. in. teorię wiroprądowych badań nieniszczących

i opracowano wiele oryginalnych przyrządów do takich badań [3]. Urządzenia skonstruowane w tym instytucie znalazły bardzo szerokie zastosowanie przemysłowe, a od powstania instytutu w Reutlingen datuje się okres tworzenia wielu podobnych, praktycznie na całym świecie.

Ideę wiroprądowych badań nieniszczących można przedstawić w następujący sposób:

- zmienne pole magnetyczne jest wytwarzane przez wzbudnik zasilany prądem zmiennym o częstotliwości z zakresu od kilkudziesięciu herców do kilku megaherców,
- w pobliżu wzbudnika umieszcza się badaną próbkę, wykonaną z materiału przewodzącego prąd elektryczny,
- prądy wirowe zaindukowane w próbce są źródłem wtórnego pola magnetycznego,
- to ostatnie zawiera informację o różnych cechach próbki (o wadach materiałowych, konduktywności, wymiarach, a także o wzajemnym usytuowaniu wzbudnika i próbki),
- mierzona jest indukcja magnetyczna w otoczeniu badanej próbki bądź inna wielkość fizyczna, zależnie od konstrukcji konkretnego przetwornika wiroprądowego,
- zmierzona wielkość jest analizowana pod kątem określenia wartości szukanego parametru próbki.

Wiroprądowe badania nieniszczące znalazły wiele zastosowań, jak np.:

- wykrywanie wad materiałowych w płytach, rurach, prętach,
- badania stanu łączy spawanych – także pod warstwą farby,
- pomiar konduktywności elektrycznej i przenikalności magnetycznej,
- pomiar grubości folii i pokryć niemetalicznych na podłożu metalicznym,
- sortowanie materiałów o różnej obróbce cieplnej, mikrostrukturze, naprężeniach.

Ważną zaletą badań wiroprowadowych jest możliwość ich przeprowadzania bez konieczności demontażu, a nawet bez wyłączenia z eksploatacji poszczególnych części. Można je prowadzić w różnych warunkach atmosferycznych, poprzez warstwy farb lub izolacji, a całe urządzenie pomiarowe może być trzymane w dłoni. Dzięki tym zaletom defektoskopy wiroprowadowe z powodzeniem zastępują inne urządzenia stosowane w badaniach [4, 5].

Podstawą do zdobycia informacji o strukturze badanego materiału jest oddziaływanie pola magnetycznego wzbudnika z obiektem. W istocie wielkością fizyczną świadczącą o takim oddziaływaniu jest zaindukowany prąd. Gęstość prądu wewnątrz badanego elementu nie jest stała, a dodatkowo zmienia się wraz ze zmianami parametrów wzbudnika. Parametry wpływające na indukowany prąd wirowy to: częstotliwość prądu zasilającego przetwornik, kształt i wymiary geometryczne cewek, a także ich odległość od badanego obiektu.

## 2. Model przetwornika

Równania Maxwella, opisujące działanie przetwornika wiroprowadowego można przekształcić do równania różniczkowego dla wektorowego potencjału magnetycznego  $\underline{A}$ , które dla zagadnień zmiennych w czasie w sposób sinusoidalny przyjmuje postać [1, 6]:

$$\nabla^2 \underline{A} = -\mu \underline{J}_s - j\omega\mu\sigma \underline{A} - \omega^2 \mu\varepsilon \underline{A}, \quad (1)$$

gdzie:  $\mu$  – przenikalność magnetyczna,

$\underline{J}_s$  – gęstość prądu źródłowego,

$\sigma$  – przewodność badanego obiektu,

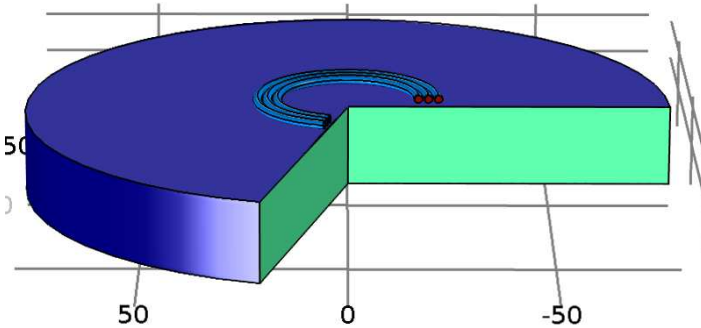
$\varepsilon$  – przenikalność elektryczna,

$\omega$  – pulsacja ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – częstotliwość).

Rozwiązanie analityczne tego równania, z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla najprostszego przetwornika (jednozewojowa, nieskończenie cienka cewka nad nieskończenie rozległą płytą) przyjmuje dość skomplikowaną postać, w dodatku zawierającą całkę, której nie da się obliczyć analitycznie. Z tego powodu

najpowszechniejszą metodą obliczania wielkości występujących w badaniach wirowych jest metoda elementów skończonych.

Rysunek 1 przedstawia model układu złożonego z prostego przetwornika i obiektu. Trójzwojowa cewka leży w płaszczyźnie równoległej do powierzchni umieszczonej pod nią przewodzącej płyty. Cewka jest zasilana napięciem sinusoidalnie zmiennym o ustalonej wartości. Ze względu na symetrię, model ten można zbudować w układzie osiowosymetrycznym ( $r$  – od środka płyty,  $z$  – oś pionowa, od powierzchni płyty w górę).



Rys. 1 Trzy współosiowe cewki leżą w jednej płaszczyźnie, równoległej do umieszczonej pod nimi przewodzącej płyty.

### 3. Indukowane prądy wirowe

Analityczne rozwiązanie równania (1) dla jednozwojowej, nieskończenie cienkiej cewki nad nieskończenie rozległą, jednorodną płytą umożliwia wyznaczenie gęstości prądu indukowanego w tej płycie. W walcowym układzie współrzędnych wektorowy potencjał magnetyczny  $\underline{A}$  będzie miał tylko jedną składową  $\underline{A}_\varphi$  zależną od współrzędnych  $r$  i  $z$ :  $\underline{A} = \underline{A}_\varphi(r, z)\mathbf{1}_\varphi$ . Zakładając brak prądów źródłowych i pomijając prąd przesunięcia w równaniu (1), po rozwiązaniu tego równania można wyznaczyć gęstość prądu indukowanego, który również będzie miał tylko jedną składową  $\underline{J}_\varphi(r, z)$  [1, 6]:

$$\underline{J}_\varphi(r, z) = -j\omega\sigma\mu_0\underline{I}r_0 \int_0^\infty \alpha\mu_r e^{-\alpha z_0} J_1(\alpha r_0) J_1(\alpha r) \frac{(\alpha\mu_r + \alpha_1) e^{\alpha_1(2d+z)} + (\alpha_1 - \alpha\mu_r) e^{-\alpha_1 z}}{(\alpha\mu_r + \alpha_1)^2 e^{2\alpha_1 d} - (\alpha_1 - \alpha\mu_r)^2} d\alpha, \quad (2)$$

gdzie:  $\mu_0, \mu_r$  – przenikalność magnetyczna próżni, przenikalność magnetyczna płyty,

$\underline{I}$  – prąd w cewce,

$r_0$  – promień cewki,

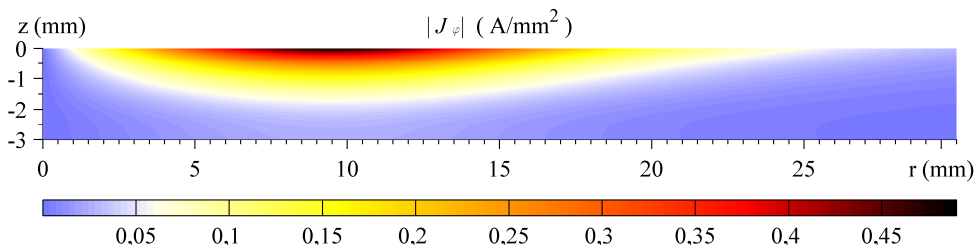
$z_0$  – położenie cewki na osi  $z$ ,

$J_1(\cdot)$  – funkcja Bessela pierwszego rodzaju, pierwszego rzędu,

$d$  – grubość płyty (górną powierzchnią płyty leży w płaszczyźnie  $z = 0$ ),

$\alpha$  – oznacza stałą rozdzielenia zmiennych,  $\alpha_1 = (\alpha^2 + j\omega\mu_r\sigma)^{1/2}$ .

Równanie (2) opisuje gęstość prądu indukowanego w płycie przez jedną cewkę. Rysunek 2 przedstawia przykładowe wyniki obliczania gęstości prądu indukowanego w płycie aluminiowej przez jedną cewkę. Gęstość prądu indukowanego przez trzy cewki będzie sumą wartości obliczonych dla każdej cewki z osobna. Dodając wartości indukowanych prądów i przedstawiając wyniki należy pamiętać o tym, że są to wielkości zespolone.



Rys. 2 Moduł gęstości prądu  $|J_\phi|$  ( $A/mm^2$ ) indukowanego w aluminiowej płycie przez nieskończenie cienki pojedynczy zwoj kołowy, obliczony na podstawie równania (2) [6].

#### 4. Głębokość wnikania

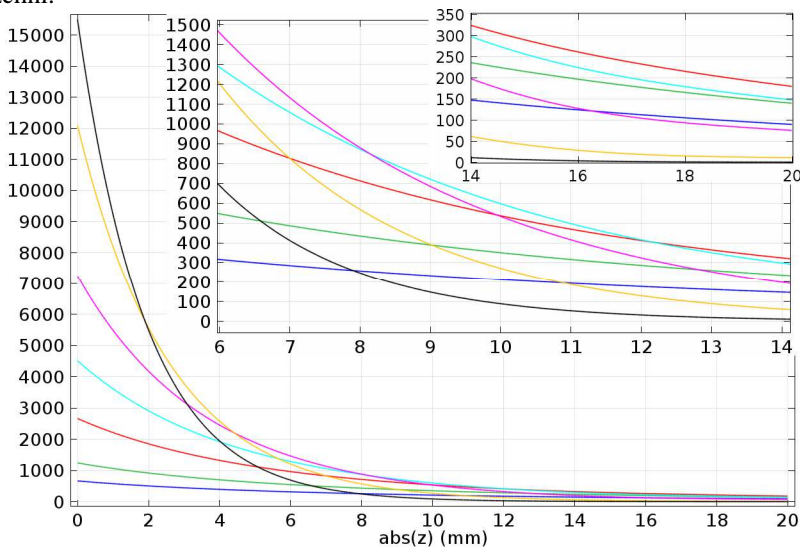
Jedną z wielkości istotnych w badaniach wiropądowych jest zastępcza *głębokość wnikania* pola elektromagnetycznego  $\delta$  (nazywana też *standardową głębokością wnikania* lub po prostu *głębokością wnikania*). Wielkość ta w sposób umowny określa grubość warstwy materiału poddawanej badaniom. Gęstość prądu indukowanego w półnieskończonej przewodzącej płycie przez wnikającą w nią sinusoidalnie zmienną w czasie płaską falę elektromagnetyczną zmienia się eksponencjalnie wraz z odległością od powierzchni. Wartość tej gęstości dla konkretnej głębokości  $z$  zależy od częstotliwości  $f$  i parametrów materiałowych płyty. Przyjmując, że w kartezjańskim układzie współrzędnych, którego oś  $z$  jest prostopadła do powierzchni płyty, wektor natężenia pola magnetycznego ma tylko składową styczną do tej powierzchni, gęstość prądu ma również tylko składową styczną do powierzchni. Moduł gęstości prądu zmienia się według zależności:

$$J(z) = J_0 \exp\left(-z\sqrt{f\pi\mu\sigma}\right), \quad (3)$$

gdzie  $J_0$  oznacza moduł gęstości prądu na powierzchni obiektu.

Rysunek 3 przedstawia wykresy wartości gęstości prądów wirowych indukowanych w płycie miedzianej przez trójzwojową płaską cewkę (zob. Rys. 1) zasilaną prądem o częstotliwościach 10, 20, 50, 100, 200, 500 i 1000 Hz. Wykresy przedstawiają wartości bezwzględne prądów wzdłuż osi  $z$  – od powierzchni (0 mm) do dna płyty (20 mm), dla współrzędnej  $r = 20$  mm (położenie środkowego zwoju). Największe wartości gęstości prądu indukowanego na powierzchni występują dla najwyższej z przyjętych częstotliwości (czarna linia). Jednocześnie dla tej częstotliwości wartości prądu maleją

najszybciej wzdłuż głębokości płyty, przyjmując wartości bliskie zera na jej dolnej powierzchni.



Rys. 3 Moduł gęstości prądu  $|J_\phi|$  ( $A/m^2$ ) indukowanego w miedzianej płycie przez trójzwojową cewkę zasilaną prądem o częstotliwościach od 10 Hz (niebieska linia) do 1 kHz (czarna linia). Wyniki obliczeń z programu Comsol Multiphysics.

Podstawiając:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{f\pi\mu\sigma}}, \quad (4)$$

wyrażenie na gęstość prądu można przedstawić w postaci:

$$J(z) = J_0 \exp(-z/\delta), \quad (5)$$

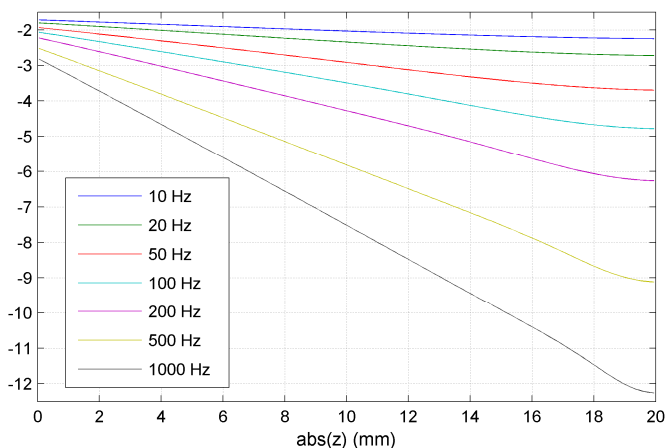
Widać, że  $\delta$  jest głębokością, na której amplituda gęstości prądu maleje e-krotnie. Głębokość wnikania  $\delta$  można też traktować jako grubość warstwy, w której indukuje się całkowity prąd o stałej gęstości, a poza którą prąd nie indukuje się wcale. Wartość głębokości wnikania  $\delta$  zależy od częstotliwości pola oraz od przenikalności magnetycznej i przewodności elektrycznej rozpatrywanego materiału.

Określa się też *efektywną głębokość wnikania* równą  $3\delta$ , przy której indukowane prądy maleją poniżej 5% wartości gęstości prądu na powierzchni.

Jednocześnie, wraz ze zmniejszaniem się amplitudy gęstości prądu, narasta kąt opóźnienia fazowego prądu w stosunku do prądu na powierzchni. Wartość tego kąta (w radianach) wynosi:

$$\theta = z\sqrt{f\pi\mu\sigma} = \frac{z}{\delta}. \quad (6)$$

Rysunek 4 przedstawia kąt opóźnienia fazowego indukowanego prądu (w radianach).



Rys. 4 Kąt opóźnienia fazowego prądu indukowanego (rad) w miedzianej płycie przez trójzwojową cewkę zasilaną prądem o częstotliwościach od 10 Hz (niebieska linia) do 1 kHz (czarna linia).

Wyniki obliczeń z programu Comsol Multiphysics.

## Literatura

1. C.V. Dodd, W.E. Deeds, **Analytical solutions to eddy current probe coil problems**, Journal of Applied Physics, vol.39, no.6 pp.2829-2838, May 1968
2. R.C. McMaster, P. McIntire, M.L. Mester: **Nondestructive testing handbook, volume 4: electromagnetic testing (eddy current, flux leakage and microwave nondestructive testing)**, American Society for Nondestructive Testing, second edition, 1986
3. Strona internetowa Instytutu Foerстера: <http://www.foerstergroup.de>
4. L.O. Goldberg, **Eddy current testing, an emerging NDT method for ferritic weld inspection**, Materials Evaluation, Vol. 56, No. 2, pp. 149–15, February 1982
5. L.O. Goldberg, **The use of eddy current for ferritic weld testing in nuclear power plants**, Materials Evaluation, Vol. 61, No. 12, pp. 1274-1278, December 2003
6. K. Stawicki, **Dobór parametrów wzbudnika w układach defektoskopii wiroprowadowej**, rozprawa doktorska, Szczecin, 2005
7. Pomoc do programu COMSOL Multiphysics