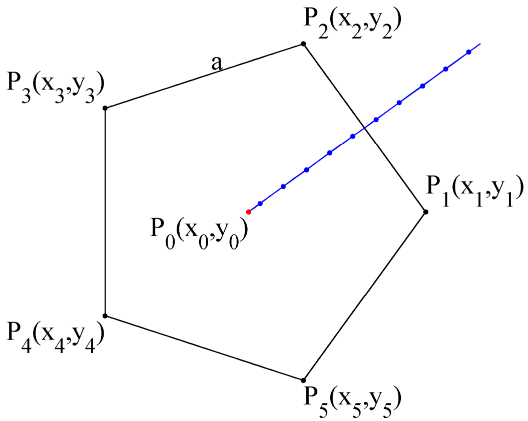
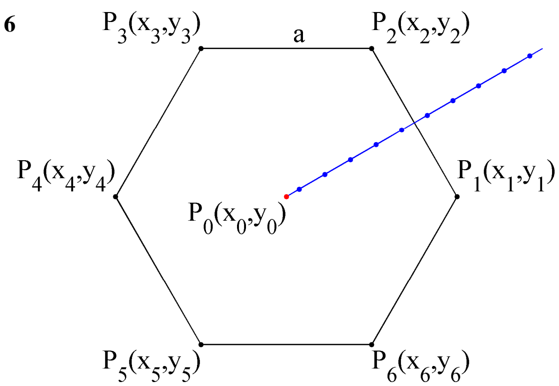
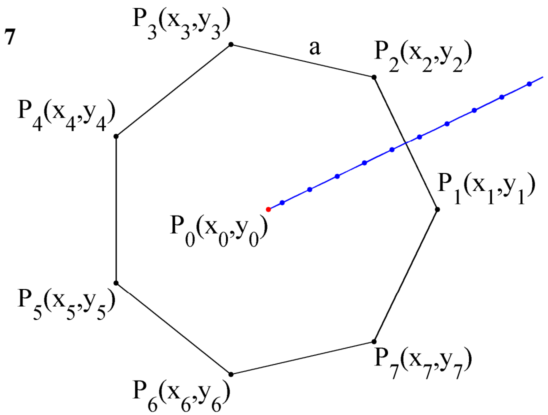
p = **5**



p = **6**



p = **7**



Pole magnetyczne

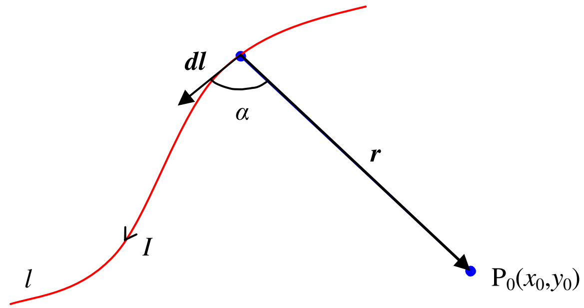
Obliczanie pola magnetycznego pochodzącego od przewodnika z prądem

1. Podstawy teoretyczne

Załóżmy, że pole magnetyczne jest wzbudzane przez cienki przewód l z prądem o natężeniu I. Natężenie pola magnetycznego w dowolnym punkcie P_0 leżącym poza przewodem obliczamy z prawa Biota – Savarta[1] według wzoru:

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

przy czym wszystkie wielkości występujące we wzorze (1) zaznaczone są na Rys. 1



Rys. 1 Przewód z prądem

Kierunek wektora $\boldsymbol{H}$ wyznaczamy z właściwości iloczynu wektorowego przyjmując kierunek $\boldsymbol{dl}$ zgodnie z kierunkiem prądu.

Jeżeli krzywa l jest zadana na płaszczyźnie, to wektor $\boldsymbol{H}$ ma tylko składową normalną do tej płaszczyzny i wzór (1) można przepisać w postaci:

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{\sin\alpha}{r^2}dl \tag{2}$$

[1] Z pomiarów momentu działającego na igłę magnetyczną **Jean Baptiste Biot** i **Felix Savart** znaleźli w 1820 r. zależność na pole magnetyczne krótkiego odcinka przewodu dl z prądem I. Zależność ta może być również wyprowadzona z równania $\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0$.

2. Obliczenia numeryczne

Przyjmujemy, że kształt przewodu – krzywa l we wzorze (2), jest opisany równaniem parametrycznym $l(t)$, $t \in (0, t_{\max})$ i jest zadany w postaci funkcji, określającej współrzędne punktu źródłowego pola dla zadanej wartości parametru t.

Wzór (2) zastępujemy zależnością przybliżoną:

$$H = \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \alpha(t)}{r^2(t)} \Delta l(t) \tag{3}$$

gdzie $t = (k - ½)\Delta t$, a kolejne odcinki przewodu są reprezentowane prostymi.

Kwadrat odległości pomiędzy punktem źródłowym pola $(x(t), y(t))$, a punktem badanym (x_0, y_0) jest określony zależnością:

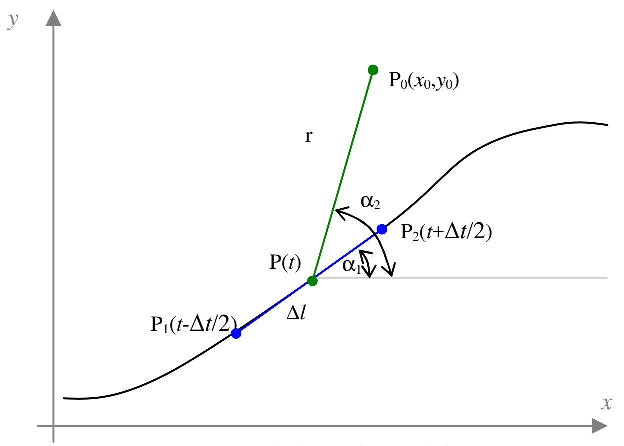
$$r^2 = [x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 \tag{4}$$

natomiast długość odcinka przewodu z prądem – zależnością:

$$\Delta l = \sqrt{\left[x\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - x\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)\right]^2 + \left[y\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - y\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)\right]^2} \tag{5}$$

Dla obliczenia kąta α pomiędzy styczną do przewodu z prądem a kierunkiem – do punktu badanego obliczamy współczynniki kierunkowe prostych i wyznaczamy kąt α z zależności (Rys. 2):

$$\alpha(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y(t)}{x_0 - x(t)} - \operatorname{arctg} \frac{y(t+\Delta t/2) - y(t-\Delta t/2)}{x(t+\Delta t/2) - x(t-\Delta t/2)} \tag{6}$$



Rys. 2 Styczna do krzywej w punkcie P

Literatura

1. Ryszard Sikora, **Teoria Pola Elektromagnetycznego**, *Wydawnictwa Naukowo-Techniczne* 1997, wydanie trzecie zmienione, str. 134–141
2. Maciej Krakowski, **Elektrotechnika Teoretyczna t.2**, *Wydawnictwa Naukowe PWN*, 1999, wydanie szóste, str. 79–94
3. Markus Zahn, **Pole Elektromagnetyczne**, *Państwowe Wydawnictwo Naukowe* 1989, str. 310–314, 318–321, 325–327

5. Zadania

Dana jest ramka w postaci wielokąta foremnego (rzędu p) o długości boku a, z prądem o natężeniu I (zob. rysunek na następnej stronie). Zakładamy, że prąd w ramce ma kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara.

1) Za pomocą funkcji `em3` obliczyć natężenie pola magnetycznego w środku ramki (należy policzyć pole od jednego boku i wynik pomnożyć przez liczbę boków).

2) Obliczyć natężenia pola w punktach wzdłuż prostej l, przecinającej przewód z prądem (wybrać 5 punktów wewnątrz i 5 na zewnątrz ramki) – zobacz rys. na następnej stronie.

3) Korzystając z prawa Biota – Savarta (równanie 1) wyznaczyć wzór określający natężenie pola magnetycznego H_0 w środku ramki (zob. punkt 3.1).

4) Porównując wzór uzyskany w zadaniu 3. z zależnością określającą natężenie pola magnetycznego w środku zwoju kołowego (równanie 9) wyznaczyć wzór umożliwiający obliczenie promienia r_0 zwoju kołowego takiego, aby natężenia pola magnetycznego H_0 w środku zwoju kołowego i ramki (wielokąta) – z takim samym prądem I, były jednakowe.

W sprawozdaniu należy umieścić uzyskane wyniki (zadanie 1 i 2), wyprowadzenie wzoru (zadanie 3), obliczone wartości: H_0 i r_0 (zadanie 4) oraz wnioski.

Wzory dla wielokąta foremnego

Promień okręgu opisanego	Promień okręgu wpisanego	Kąt wielokąta (w stopniach)
$R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{p}}$	$r = \dfrac{1}{2} a \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{p}$	$\alpha = \dfrac{(p-2)\cdot 180°}{p}$

a – długość boku, p – liczba boków wielokąta określamy dl i α_1 – wykorzystywane we wzorze (2):

```
dl = sqrt((X(1)-X(2))^2+(Y(1)-Y(2))^2);
alfa1 = atan2(Y(1)-Y(2),X(1)-X(2));
```

dla każdego elementarnego odcinka przewodu obliczymy r^2, α oraz dH:

```
for k = 1:n
 x = (X(k)+X(k+1))/2;
 y = (Y(k)+Y(k+1))/2;
 r2 = (x-x0)^2+(y-y0)^2;
 alfa2 = atan2(y-y0,x-x0);
 alfa = alfa2 - alfa1;
 dH(k) = sin(alfa)/r2;
end
dH = I/4/pi*dl*dH;
```

Całkowite natężenie pola otrzymamy jako sumę cząstkowych pól dH:

```
H = sum(dH);
```

Rysunek poglądowy:

```
line([x1,x2],[y1,y2],'color','k');
hold on
plot(x0,y0,'ro')
axis equal
xlabel('x  (m)');
ylabel('y  (m)');
txt = sprintf('= %0.5g ^A/_m',H);
title(['{\it H } ' txt])
```

Wykres natężeń pola d$\boldsymbol{H}$ pochodzących od elementarnych odcinków przewodu:

```
figure;
bar(1:n,dH);
axis tight
ylabel('dH');
xlabel('k');
title('Pole od poszczegolnych odcinkow prostej');
```

Do uzyskania poprawnych wyników konieczne jest określenie jednostek – funkcja zapisana w przedstawiony wyżej sposób przyjmuje jako argumenty wartości wyrażone w jednostkach SI (metry, ampery). Wyniki otrzymujemy również w jednostkach SI, czyli w tym przypadku natężenie pola magnetycznego w A/m.

3. Obliczenia analityczne

W szczególnych przypadkach, gdy krzywa l jest opisana łatwym do analizowania równaniem, całkę we wzorze (2) możemy rozwiązać analitycznie. W tym celu wzór (2) musimy przekształcić tak, aby otrzymać pod całką funkcję tylko jednej zmiennej (zmienne α i r musimy wyrazić za pomocą zmiennej l albo wszystkie zmienne występujące pod całką wyrażamy za pomocą parametru – podobnie jak w obliczeniach numerycznych). Jeśli taką całkę potrafimy rozwiązać analitycznie, to możemy otrzymać równanie określające natężenie pola magnetycznego w zależności od prądu i geometrii przewodu.

3.1 Wielokąt foremny

Takim przypadkiem jest ramka w postaci wielokąta foremnego. Znając liczbę p boków wielokąta i długość a boku, możemy obliczyć natężenie pola magnetycznego w dowolnym punkcie jako sumę pól pochodzących od poszczególnych boków – będzie to suma p całek po odcinkach prostoliniowych. W najprostszym przypadku, gdy obliczamy natężenie pola w środku ramki, zadanie sprowadza się do obliczenia tylko jednej całki, dzięki czemu można je wyrazić dość prostym wzorem. Wartość natężenia pola powinna być w takim wzorze zależna od prądu I, liczby boków p wielokąta i długości a każdego boku.

3.2 Zwój kołowy

Również łatwe jest obliczenie analityczne pola magnetycznego w środku zwoju kołowego. Przepisując wzór (2) dla tego przypadku możemy zauważyć, że odległość między przewodem a środkiem zwoju jest stała i stanowi promień r_0 okręgu. Ponadto dla każdego punktu na zwoju odcinek dl jest prostopadły do r_0, możemy zatem podstawić $\alpha = 90^\circ$ i $r = r_0 = \text{const.}$:

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{\sin 90^\circ}{r_0^2}\mathrm{d}l\,. \tag{7}$$

Po wyłączeniu stałych przed całkę otrzymujemy:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0^2}\int_l \mathrm{d}l\,, \tag{8}$$

skąd ostatecznie:

$$H = \frac{I}{2r_0}\,. \tag{9}$$

4. Obliczenia w programie MATLAB: prosta na płaszczyźnie

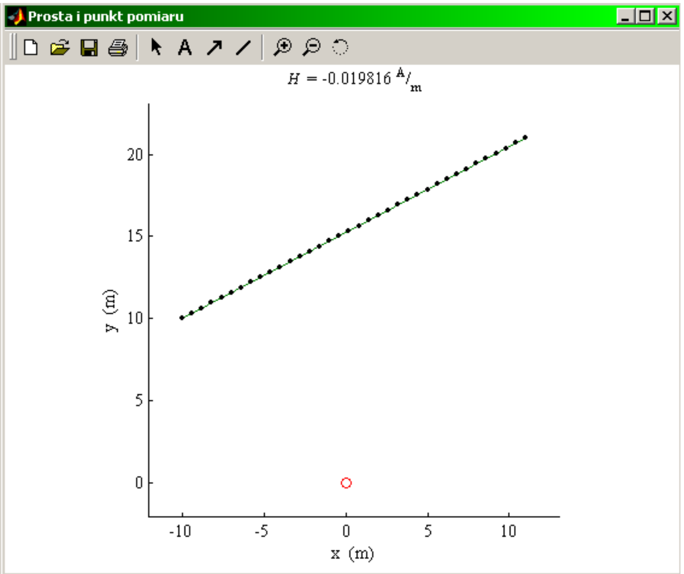
Do obliczenia natężenia pola magnetycznego ***H*** pochodzącego od prostoliniowego przewodu z prądem o wartości ***I*** wykorzystamy wzór (2) zapisany w funkcji `em3`. Przyjmujemy, że prosta leży na płaszczyźnie X0Y. Argumentami funkcji będą:

- `x0,y0` – współrzędne punktu, w którym obliczamy pole,
- `x1,y1` – współrzędne początku prostej,
- `x2,y2` – współrzędne końca prostej,
- `I` – wartość prądu w przewodzie,
- `n` – ilość odcinków na jaką podzielimy przewód

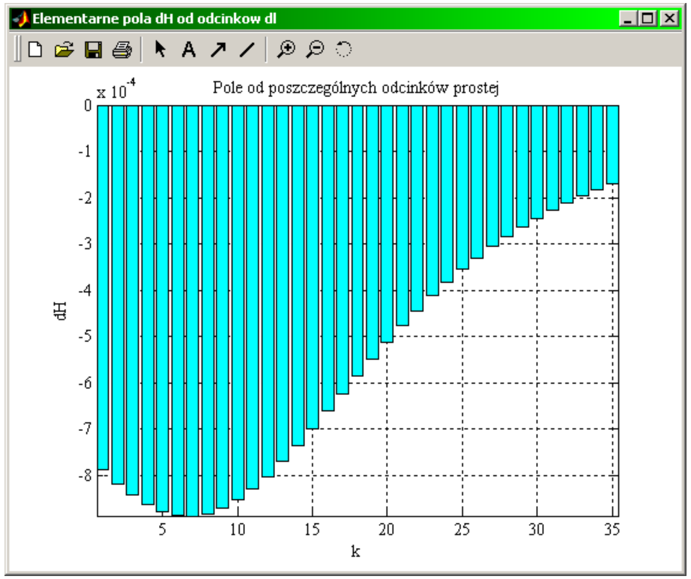
Funkcję wywołujemy podając w oknie poleceń poszczególne parametry:

```
[H,dH] = em3(x0,y0,x1,y1,x2,y2,I,n);
```

Jako wynik działania funkcji otrzymamy natężenie pola magnetycznego *H* w żądanym punkcie i elementarne natężenia pola *dH* pochodzące od poszczególnych odcinków, na które podzielono przewód. Zostaną również narysowane dwa wykresy: Pierwszy to rysunek poglądowy na którym możemy zobaczyć wzajemne usytuowanie przewodu i punktu w którym obliczamy pole oraz wartość pola. Drugi rysunek to wykres cząstkowych natężeń pola *dH* pochodzących od elementarnych odcinków przewodu (*n* wartości *dH* – dla każdego elementarnego odcinka).



Rys. 3 Rysunek poglądowy – `Prosta i punkt pomiaru`, dla przykładowych danych



Rys. 4 Natężenia pola w punkcie P_0 od elementarnych odcinków d*l*

Funkcja jest zapisana w pliku `em3.m`. Wartość natężenia pola można obliczyć również dla przewodu o innym kształcie – należy w tym celu odpowiednio zmodyfikować współrzędne przewodu określonego parametrami `x1,y1,x2,y2` i podzielonego na odcinki w liniach 2 i 3 programu.

4.1 Funkcja w języku MATLAB

W nagłówku, po słowie kluczowym **`function`** są określone:

- wartości `H,dH`, które funkcja oddaje,
- nazwa funkcji `em3` (musi być taka sama jak nazwa pliku),
- argumenty funkcji `x0,y0,x1,y1,x2,y2,I,n`

```
function [H,dH] = em3(x0,y0,x1,y1,x2,y2,I,n)
```

poniższa komenda zamyka wszystkie otwarte w programie MATLAB wykresy:

```
close all
```

określamy podział przewodu na elementarne odcinki (podział na *n*+1 punktów):

```
X = linspace(x1,x2,n+1);
Y = linspace(y1,y2,n+1);
```