Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych metodą elementów skończonych (2)

Energia pola elektrycznego

Energię pola elektrycznego w obszarze Ω można wyrazić za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$, wektora indukcji elektrycznej $\mathbf{D}$, bądź skalarnego potencjału elektrycznego V:

(10) $$W = \int_\Omega \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon E^2 d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right\}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon\left|\nabla V\right|^2 d\Omega$$

Gradient potencjału można obliczyć z (8) traktując wartości potencjałów w węzłach jako stałe:

(11) $$\nabla V = \nabla\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}_\mathrm{w} = \sum_{i=1}^{3}\nabla N_i V_i \;,$$

(12) $$\left|\nabla V\right|^2 = \sum_{i=1}^{3}\nabla N_i V_i \cdot \sum_{j=1}^{3}\nabla N_j V_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} V_i \nabla N_i \cdot \nabla N_j V_j \,.$$

Gradienty funkcji kształtu wynoszą:

(13) $$\begin{aligned}
\nabla N_1 &= \frac{1}{2\Delta}\left[(y_2 - y_3)\vec{1}_x + (x_3 - x_2)\vec{1}_y\right]\\
\nabla N_2 &= \frac{1}{2\Delta}\left[(y_3 - y_1)\vec{1}_x + (x_1 - x_3)\vec{1}_y\right]\\
\nabla N_3 &= \frac{1}{2\Delta}\left[(y_1 - y_2)\vec{1}_x + (x_2 - x_1)\vec{1}_y\right]
\end{aligned}$$

Energia wewnątrz elementu skończonego o polu S:

(14) $$W^{(e)} = \frac{1}{2}\int_e \varepsilon\left|\nabla V\right|^2 dS$$

(15) $$W^{(e)} = \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} V_i\left(\int_e \nabla N_i\cdot\nabla N_j\, dS\right)V_j$$

(16) $$W^{(e)} = ½\, \varepsilon \mathbf{V}_\mathrm{w}^\mathrm{T}\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{V}_\mathrm{w}\,,$$

gdzie $\mathbf{V}_\mathrm{w}^\mathrm{T}$ jest transponowaną macierzą wartości potencjałów w węzłach elementu – o wymiarach 1×3, a $\mathbf{K}^{(e)}$ jest macierzą o wymiarach 3×3, zawierającą całki po powierzchni elementu e z iloczynów gradientów funkcji kształtu (13) w poszczególnych węzłach. Składniki macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$ są równe:

(17) $$\begin{aligned}
K_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2\right] & K_{12}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\right]\\
K_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2\right] & K_{13}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)\right]\\
K_{33}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2\right] & K_{23}^{(e)} &= \frac{1}{4\Delta}\left[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\right]
\end{aligned}$$

i macierz ta, nazywana *macierzą sztywności* elementu, jest symetryczna, tzn. składniki o indeksach ij są równe składnikom o indeksach ji. Macierz $\mathbf{K}^{(e)}$ należy utworzyć dla każdego elementu skończonego.

ZADANIE:

6. Napisz funkcję, która będzie tworzyć macierz $\mathbf{K}^{(e)}$ dla danego elementu, na podstawie współrzędnych węzłów (równanie 17). Argumentami funkcji będą współrzędne węzłów (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), pogrupowane w macierze X i Y.

Równanie (16) wyraża energię zgromadzoną w pojedynczym elemencie skończonym. Równanie o takiej samej postaci należy utworzyć dla całego obszaru obliczeń, uwzględniając wszystkie węzły obszaru – na podstawie wszystkich macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$ (tzw. macierzy lokalnych) utworzonych dla wszystkich elementów. Globalna macierz $\mathbf{K}$ będzie miała rozmiar $n \times n$, czyli tyle wierszy i kolumn ile jest węzłów.

Składniki macierzy lokalnych należy przenieść do macierzy globalnej uwzględniając globalną numerację węzłów. Każdy węzeł ma przynajmniej dwa numery: jeden globalny – w całym obszarze (niech będzie oznaczony przez i) oraz drugi lokalny – w danym elemencie (oznaczony przez p). Jeśli węzeł jest wspólny dla kilku elementów, to w każdym elemencie ma niezależny numer lokalny. Składnik K_{ii} macierzy globalnej $\mathbf{K}$ jest sumą Składników $K^{(e)}{}_{pp}$ ze wszystkich macierzy lokalnych $\mathbf{K}^{(e)}$, w których występuje węzeł i (lokalnie o numerze p). Podobnie, składnik K_{ij} jest sumą składników $K^{(e)}{}_{pq}$ z macierzy lokalnych tych elementów skończonych, które mają wspólną krawędź i-j.

Na rysunku obok zaznaczono węzeł 2 – należący tylko do elementu 1, węzeł 5 – wspólny dla elementów 1, 4 i 5 oraz węzeł 6 – wspólny dla elementów 1, 2, 5 i 6. Przyjmując następującą kolejność węzłów w elementach skończonych:

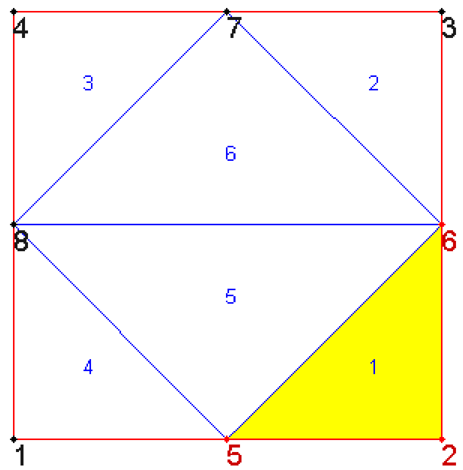
(1) 5, 2, 6 (2) 6, 3, 7 (4) 1, 5, 8 (5) 5, 6, 8 (6) 6, 7, 8

do macierzy $\mathbf{K}$ należy podstawić:

$K_{22} = K^{(1)}{}_{22}$ $K_{25} = K^{(1)}{}_{21}$ $K_{26} = K^{(1)}{}_{23}$

$K_{55} = K^{(1)}{}_{11} + K^{(4)}{}_{22} + K^{(5)}{}_{11}$ $K_{56} = K^{(1)}{}_{13} + K^{(5)}{}_{12}$

$K_{66} = K^{(1)}{}_{33} + K^{(2)}{}_{11} + K^{(5)}{}_{22} + K^{(6)}{}_{11}$



Do utworzenia macierzy $\mathbf{K}$ niezbędna jest znajomość siatki elementów skończonych. Informacje o niej zapisuje się między innymi w macierzy `t`, która – przy podziale na trójkąty – ma 4 wiersze i tyle kolumn ile jest elementów skończonych. Macierz ta jest tworzona na etapie dyskretyzacji obszaru. Każdej kolumnie macierzy `t` odpowiada jeden element siatki: w wierszach 1-3 zapisywane są numery globalne węzłów tworzących dany element, a w wierszu czwartym umieszcza się informację o tym, do jakiego podobszaru on należy.

ZADANIE:

7. Napisz funkcję, która będzie tworzyć globalną macierz $\mathbf{K}$, na podstawie macierzy lokalnych oraz informacji o elementach skończonych umieszczonych w macierzy `t`. Argumentami funkcji będą macierze lokalne $\mathbf{K}^{(e)}$ dla wszystkich elementów oraz macierz `t`.

Zasada ekstremum energii

Po utworzeniu macierzy $\mathbf{K}$ można zapisać równanie dla energii zgromadzonej w całym obszarze:

$$W^{G} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon \mathbf{V}_{w}{}^{T} \mathbf{K}\, \mathbf{V}_{w}\,. \tag{18}$$

Zasada ekstremum energii mówi, że rzeczywisty rozkład pola elektrostatycznego zapewnia minimum energii zgromadzonej w danym obszarze. Rozwiązanie zadania metodą elementów skończonych musi więc być takie, aby energia wyrażona wzorem (18) była najmniejsza z możliwych. Należy zatem znaleźć minimum funkcji W^{G} względem wartości potencjałów w węzłach $\mathbf{V}_{w}$.

Układ równań algebraicznych

W równaniu (18) występują dwie macierze:

- macierz sztywności układu $\mathbf{K}$ charakteryzuje siatkę elementów skończonych,
- macierz $\mathbf{V}_w$ (oraz $\mathbf{V}_w^{\,T}$ – macierz transponowana) zawiera wartości potencjału pola elektrycznego w węzłach obszaru.

Przy ustalonej siatce macierz $\mathbf{K}$ jest stała, niezależna od wartości potencjału (jest złożeniem macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$ dla poszczególnych elementów, a te zależą tylko od współrzędnych węzłów – zob. równanie 17). Energia wyrażona równaniem (18) może więc być zależna tylko od wartości potencjałów występujących w macierzy $\mathbf{V}_w$. Przyjmując różne wartości potencjałów w węzłach uzyskuje się różne wartości energii. Zgodnie z przytoczoną powyżej zasadą prawdziwe będą te wartości potencjałów, które dadzą minimum energii.

Jednym ze sposobów poszukiwania ekstremum funkcji jest badanie jej pochodnej. Funkcja może osiągać minimum, gdy jej pochodna jest zerowa. Należy zatem obliczyć pochodną z energii i przyrównać ją do zera. Pochodną należy policzyć względem potencjałów w węzłach. W równaniu (18) można wyszczególnić potencjały węzłów brzegowych. Potencjały te są dane warunkami brzegowymi. Są to wielkości stałe, zatem obliczanie pochodnej względem szukanych potencjałów daje w tych punktach wartości zerowe. Macierz $\mathbf{V}_w$ można zatem podzielić na dwie podmacierze:

$\mathbf{V}_Z$ – zawierającą znane wartości potencjałów oraz

$\mathbf{V}_N$ – zawierającą nieznane wartości potencjałów.

Podobnie, w macierzy $\mathbf{K}$ należy wyszczególnić podmacierze: $\mathbf{K}^{ZZ}$ związane ze znanymi potencjałami, $\mathbf{K}^{NN}$ związane z nieznanymi potencjałami i składniki $\mathbf{K}^{ZN}$ oraz $\mathbf{K}^{NZ}$ związane ze wszystkimi potencjałami (znanymi i nieznanymi). Wyodrębnienie poszczególnych podmacierzy jest łatwiejsze jeżeli węzły są ponumerowane w sposób uporządkowany, np. najmniejsze numery mają węzły o nieznanych potencjałach, a kolejne numery mają pozostałe węzły. Równanie (18) można wtedy zapisać następująco:

(19) $$W^G = \frac{1}{2}\varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N^T & \mathbf{V}_Z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{NN} & \mathbf{K}^{NZ} \\ \mathbf{K}^{ZN} & \mathbf{K}^{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N \\ \mathbf{V}_Z \end{bmatrix}$$

Pochodna z energii liczona po nieznanych potencjałach będzie zatem wyrażona:

(20) $$\frac{\partial W^G}{\partial \mathbf{V}_N} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}_N} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N^T\mathbf{K}^{NN} + \mathbf{V}_Z^T\mathbf{K}^{ZN} & \mathbf{V}_N^T\mathbf{K}^{NZ} + \mathbf{V}_Z^T\mathbf{K}^{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_N \\ \mathbf{V}_Z \end{bmatrix}$$

(21) $$\frac{\partial W^G}{\partial \mathbf{V}_N} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}_N} \left[\mathbf{V}_N^T\mathbf{K}^{NN}\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_Z^T\mathbf{K}^{ZN}\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_N^T\mathbf{K}^{NZ}\mathbf{V}_Z + \mathbf{V}_Z^T\mathbf{K}^{ZZ}\mathbf{V}_Z \right].$$

Ostatecznie po wyznaczeniu pochodnej i przyrównaniu jej do zera otrzymuje się układ równań algebraicznych, który należy rozwiązać znajdując wartości potencjałów w węzłach:

(22) $$\mathbf{K}^{NN}\,\mathbf{V}_N + \mathbf{K}^{NZ}\,\mathbf{V}_Z = 0 \quad .$$

(23) $$\mathbf{V}_N = -\left(\mathbf{K}^{NN}\right)^{-1} \mathbf{K}^{NZ}\,\mathbf{V}_Z \quad .$$

Metoda elementów skończonych w Matlabie

Poniższe komendy utworzą macierze definiujące elementy skończone takie jak na rysunku na stronie 2:

```
clear
close all
p = [0 1 1 0 0.5 1 0.5 0;0 0 1 1 0 0.5 1 0.5];
t = [5 6 7 1 5 6;2 3 4 5 6 7;6 7 8 8 8 8;1 1 1 1 1 1];
```

W macierzy **p** znajdują się informacje o współrzędnych węzłów. W pierwszym wierszu umieszczone są współrzędne x, a w drugim współrzędne y. Numer kolumny macierzy **p** jest równy numerowi węzła.

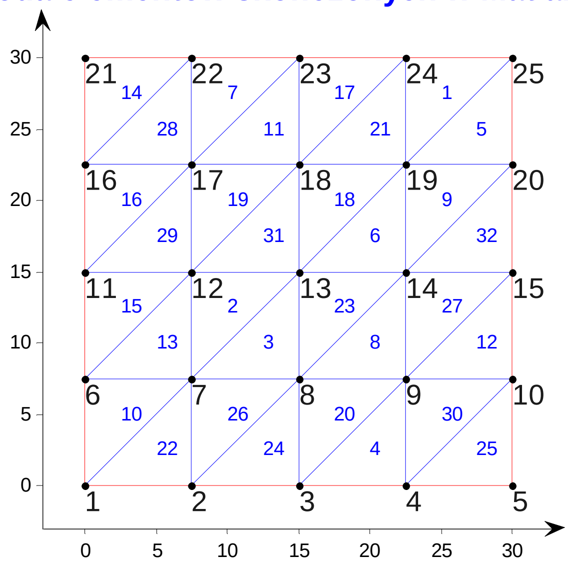
W macierzy **t** znajdziemy informacje o elementach. W pierwszym, drugim i trzecim wierszu macierzy, znajdują się numery globalne węzłów tworzących dany element skończony. Lokalne oznaczenie węzłów odpowiada numerom wierszy. Numer elementu skończonego jest równy numerowi kolumny macierzy **t**.

Zobacz zawartość macierzy **p** oraz **t** i porównaj je z rysunkiem na stronie 2.

ZADANIE:

8. Wykorzystując funkcje napisane jako rozwiązanie zadań 6 i 7 utworzyć globalną macierz $\mathbf{K}$, na podstawie macierzy lokalnych oraz informacji o elementach umieszczonych w macierzach **p** i **t**.

Metoda elementów skończonych w Matlabie (zadanie rozwiązane za pomocą MRS)



warunki brzegowe:

```
x=0:7.5:30;
y=0:7.5:30;
V1 = y/3;              % dla x=0
V2 = 10*cos(x*pi/15);% dla y=30
V3 = y/3;              % dla x=30
V4 = 5*sin(x*pi/15); % dla y=0
```

ZADANIA:

9. Dla przedstawionego na powyższym rysunku obszaru utworzyć macierze **p** i **t**. Wykorzystując poprzednio napisane funkcje utworzyć globalną macierz $\mathbf{K}$.
10. Zapisz macierz wartości potencjałów w węzłach (jak w równaniu 19). Węzłom brzegowym przypisz odpowiednie warunki brzegowe, a węzłom o szukanych potencjałach przypisz wartości `NaN`.
11. Uporządkuj elementy macierzy $\mathbf{K}$ oraz odpowiadające im wyrazy macierzy potencjałów tak, aby potencjały znane znalazły się na końcu macierzy, a nieznane na początku (jak w równaniach 19-20).
12. Wyodrębnij macierze $\mathbf{V}_N$, $\mathbf{K}^{NN}$, $\mathbf{K}^{NZ}$, $\mathbf{V}_Z$. Rozwiąż równanie 23 wyznaczając $\mathbf{V}_N$.