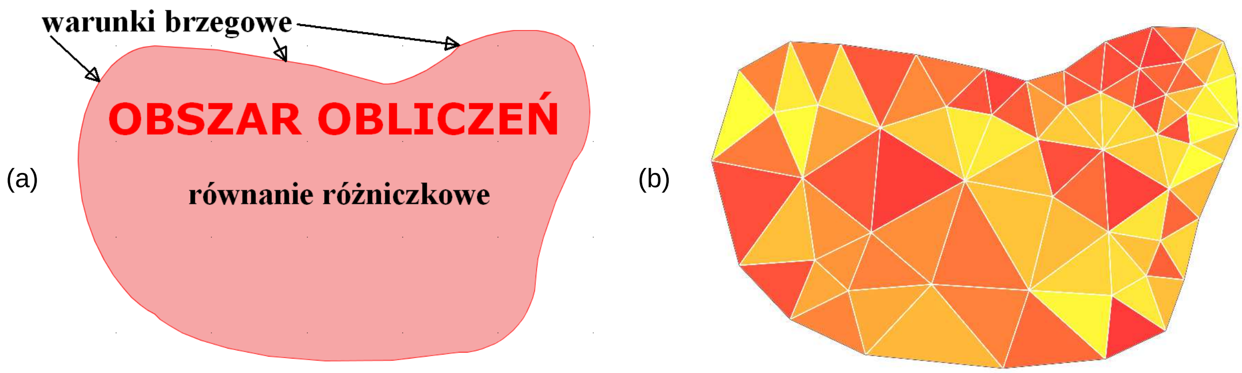
Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych metodą elementów skończonych - wprowadzenie

Wprowadzenie

Metoda Elementów Skończonych (MES) należy do numerycznych metod otrzymywania przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych. Ostatnim etapem obliczeń w MES jest rozwiązanie układu równań algebraicznych. Wcześniej jednak należy ten układ równań zbudować, zgodnie z pewnymi regułami. Dla wytłumaczenia tych reguł posłużymy się prostym przykładem zadania z elektrostatyki.

Załóżmy, że szukamy funkcji opisującej rozkład pola elektrycznego – skalarnego potencjału elektrycznego V, na płaszczyźnie XY (czyli w dwuwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych), w pewnym obszarze Ω ograniczonym brzegiem Γ, na którym znamy zachowanie się potencjału V.



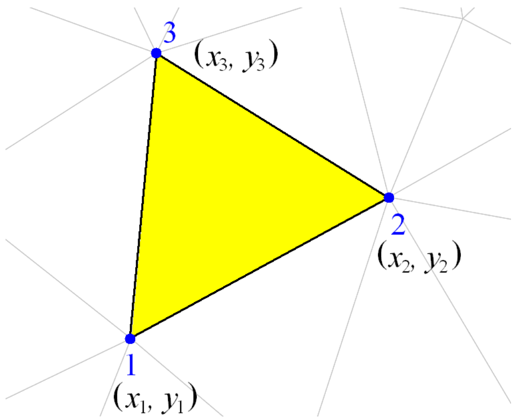
Rys. 1 (a) Zadanie: dany jest obszar obliczeń, równanie różniczkowe i warunki brzegowe,
(b) obszar obliczeń podzielony na elementy skończone.

Przyjmiemy, że w obszarze Ω nie ma żadnych ładunków elektrycznych, a pole elektryczne pochodzi z zewnątrz. Podstawowe równania elektrostatyki, po przekształceniu, sprowadzają się w tym przypadku do równania Laplace'a dla skalarnego potencjału elektrycznego V:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Do rozwiązania zadania, oprócz określenia równania różniczkowego i obszaru obliczeń, konieczna jest znajomość zachowania się potencjału V na brzegu Γ, czyli określenie **warunków brzegowych** przez podanie wartości potencjału, lub wartości pochodnej potencjału, lub kombinacji tych wielkości.

Obszar obliczeń zostaje podzielony na **elementy skończone** (w przypadku dwuwymiarowym są to najczęściej trójkąty – zob. Rys. 1b). Podział obszaru (**dyskretyzacja**) prowadzi do powstania **siatki elementów skończonych**. Punkty przecięcia linii siatki nazywamy **węzłami**. Dla elementów trójkątnych oznaczamy węzły ogólnie literami i, j, k, a biorąc konkretny element numerujemy węzły kolejno (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara): 1, 2, 3 – są to tzw. lokalne numery węzłów.



Rys. 2 Numeracja węzłów w elemencie skończonym.

Dyskretyzacja obszaru obliczeń jest zwykle pierwszym etapem rozwiązywania zadania metodą elementów skończonych. W tym kroku należy określić współrzędne węzłów oraz przypisać węzły do konkretnych elementów. Również na tym etapie należy zapisać w siatce informację o przynależności elementów do podobszarów o różnych właściwościach fizycznych. Informacje o siatce zapisuje się między innymi w macierzach `p` i `t` (zob. przykład w skrypcie **`skryptMES1.m`** poniżej).

W macierzy `p` znajdują się informacje o współrzędnych węzłów. W pierwszym wierszu umieszczone są współrzędne x, a w drugim współrzędne y. Numer kolumny macierzy `p` jest równy numerowi węzła (w przykładzie poniżej zaznaczono szóstą kolumnę macierzy, w której znajdują się współrzędne szóstego węzła).

Macierz `t` – przy podziale na trójkąty – ma 4 wiersze i tyle kolumn ile jest elementów skończonych. Każdej kolumnie macierzy `t` odpowiada jeden element siatki: w wierszach 1-3 są zapisywane numery globalne węzłów tworzących dany element, a w wierszu czwartym umieszcza się informację o tym, do którego podobszaru on należy (w analizowanym przykładzie wszystkie elementy należą do jednego obszaru oznaczonego liczbą 1; zaznaczono piątą kolumnę macierzy, w której znajdują się numery węzłów piątego elementu).

Przedstawiony poniżej skrypt utworzy macierze `p` i `t` definiujące elementy skończone takie jak na Rys. 3 oraz przedstawi na wykresie element nr 5.

skryptMES1.m

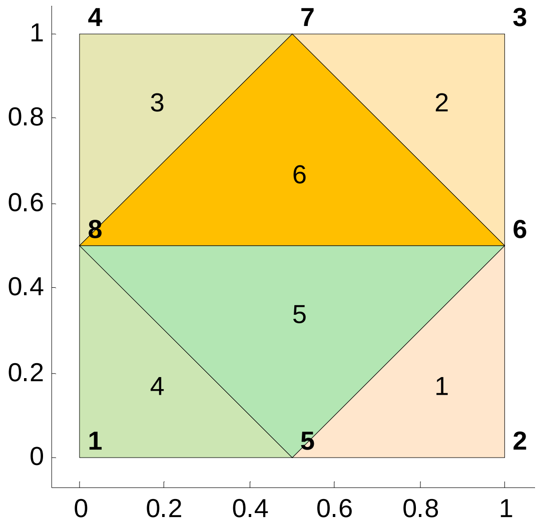
```
p = [0 1 1 0 0.5  1  0.5 0;
     0 0 1 1  0  0.5 1 0.5];

t = [5 6 7 1 5 6;
     2 3 4 5 6 7;
     6 7 8 8 8 8;
     1 1 1 1 1 1];

t5 = t([1:3 1],5);

x5 = p(1,t5);
y5 = p(2,t5);

plot(x5,y5);
axis equal
```



Rys. 3 Obszar obliczeń zawierający 8 węzłów, podzielony na 6 elementów skończonych.

Przy takim samym określeniu węzłów (w macierzy `p`) są możliwe różne podziały na elementy skończone tego samego obszaru (np. elementy 5 i 6 mogą być obrócone o 90°). Istotne jest aby elementy wypełniały cały obszar i nie zachodziły na siebie.

Po utworzeniu siatki elementów skończonych, czyli macierzy `p` i `t`, należy znaleźć sposób, w jaki będzie można obliczyć wartość szukanej funkcji w przestrzeni między węzłami, czyli należy określić odpowiednią funkcję aproksymującą. Funkcja ta będzie dla konkretnej siatki dana numerycznie, tzn. za pomocą wartości, które w ogólności będą różne dla różnych elementów skończonych.

W obszarze dwuwymiarowym, określonym za pomocą współrzędnych prostokątnych, dla każdego z elementów dobiera się aproksymację szukanej funkcji w następującej postaci:

(1) $$V(x, y) = a + bx + cy$$

Współczynniki a, b, c określa się na podstawie wartości funkcji w węzłach, z układu równań:

(2) $$\begin{aligned} V_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ V_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ V_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

który można zapisać w postaci macierzowej, skąd po przekształceniu:

(3) $$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Znając wartości funkcji V w węzłach można obliczyć współczynniki a, b, c i aproksymowane wartości szukanego potencjału w dowolnym punkcie wewnątrz elementu – z równania (1). W ten sposób zadanie redukuje się do:

1) określenia funkcji aproksymującej oraz
2) znalezienia wartości potencjału w węzłach siatki

zamiast poszukiwania rozwiązania w postaci funkcji ciągłej $V(x, y)$ w całym obszarze. W praktyce aproksymację w MES wykonuje się za pomocą funkcji kształtu.

Funkcje kształtu

Równanie (1) można zapisać w postaci macierzowej:

(4) $$V = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

a po podstawieniu (3):

(5) $$V = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna występująca w równaniach (3) i (5):

(6) $$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix},$$ gdzie Δ jest polem elementu,

podstawiona do równania (5) daje wyrażenie na potencjał w dowolnym punkcie w danym elemencie:

(7) $$V = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix},$$

które można zapisać w postaci:

(8) $V(x, y) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{V}_w$, gdzie $\mathbf{V}_w$ jest wektorem potencjałów w węzłach, jak w (7),

a $\mathbf{N} = [N_1 \ \ N_2 \ \ N_3]$ jest wektorem zawierającym **funkcje kształtu**:

(9)
$$N_1 = \frac{1}{2\Delta}\{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\}$$
$$N_2 = \frac{1}{2\Delta}\{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\}$$
$$N_3 = \frac{1}{2\Delta}\{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}$$

W węźle i wartość funkcji N_i jest równa 1, a wartości pozostałych funkcji są równe 0.

Na brzegu i-j wartość funkcji N_k jest równa 0.

Jeżeli punkt (x,y) leży poza elementem, to wartość przynajmniej jednej funkcji kształtu jest ujemna.

Suma funkcji kształtu dla danego elementu oraz dowolnych wartości x i y daje zawsze 1.

Warto zauważyć, że funkcje kształtu w równaniu (9) nie zależą od wartości potencjałów w węzłach elementów – w przeciwieństwie do współczynników a, b, c występujących w równaniu (1).

Pytania sprawdzające (do przygotowania się na wejściówkę)

Jak jest zbudowana macierz **`p`** (jakie informacje zawiera i jak są one uporządkowane)?

Jak jest zbudowana macierz **`t`** (jakie informacje zawiera i jak są one uporządkowane)?

Przyjmując dowolne współrzędne x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 wierzchołków trójkątnego elementu i wartości potencjałów V_1, V_2, V_3, w tych wierzchołkach, oblicz:

1) współczynniki aproksymacji a, b, c dla tego elementu,
2) potencjał $V(x, y)$ w dowolnym punkcie x, y wewnątrz elementu,
3) pole Δ elementu,
4) wartości funkcji kształtu N_1, N_2, N_3 dla tego elementu i przyjętych współrzędnych x, y punktu,
5) potencjał $V(x, y)$ w dowolnym punkcie wewnątrz elementu – na podstawie wartości funkcji kształtu obliczonych w punkcie 4,
6) wartości funkcji kształtu dla tego elementu i współrzędnych punktu leżącego w wierzchołku elementu,
7) wartości funkcji kształtu dla tego elementu i współrzędnych punktu leżącego na krawędzi elementu,
8) wartości funkcji kształtu N_1, N_2, N_3 dla tego elementu i współrzędnych punktu leżącego poza tym elementem.

Jak można sprawdzić poprawność wyników uzyskanych w punktach 4, 6, 7 i 8? (odpowiedź jest na tej stronie!)

Jak obliczyć macierz odwrotną do danej macierzy?

ZADANIA:

1. Dla obszaru przedstawionego na Rys. 4 (na stronie 6) utworzyć macierze **`p`** i **`t`**.
2. Napisz funkcję, **`mesPT`** która będzie tworzyć macierze **`p`** i **`t`** również dla innej, regularnej siatki, dla prostokątnego obszaru obliczeń.
3. Napisz skrypt lub funkcję wykonującą rysunek przedstawiający siatkę elementów skończonych.

Dany jest element o wierzchołkach określonych współrzędnymi $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, oraz punkt P o współrzędnych (x, y). Wartości potencjału w węzłach (V_1, V_2, V_3) są znane. Należy obliczyć wartość potencjału w punkcie P, pod warunkiem, że należy on do elementu. W tym celu należy napisać trzy funkcje: **`mesN`**, **`mesSPR`**, oraz **`mesV`**.

4. Funkcja **`mesN`** oblicza wartości funkcji kształtu dla danego punktu, na podstawie współrzędnych węzłów elementu i współrzędnych danego punktu (równanie 9). Argumentami funkcji są współrzędne węzłów zgrupowane w jednowierszowych macierzach X i Y (gdzie: X = $[x_1, x_2, x_3,]$, Y = $[y_1, y_2, y_3]$) oraz współrzędne punktu (x, y). Funkcja zwraca wynik w postaci macierzy jednowierszowej $\mathbf{N}$ zawierającej wartości $N_1 \ \ N_2 \ \ N_3$.

5. Funkcja **mesSPR** sprawdza, czy dany punkt należy do elementu. W obliczeniach funkcja wykorzystuje funkcję **mesN**. Argumentami funkcji są współrzędne węzłów elementu zgrupowane w macierzach X i Y oraz współrzędne punktu (x, y). Funkcja zwraca wynik informujący o położeniu punktu:
   1 – jeżeli punkt należy do elementu,
   0 – jeżeli punkt leży poza elementem.

6. Funkcja **mesV** oblicza potencjał w punkcie wewnątrz elementu na podstawie potencjałów w węzłach i współrzędnych węzłów. Argumentami funkcji są macierze X i Y, współrzędne punktu (x, y), oraz, umieszczone w macierzy kolumnowej Vw, potencjały (V_1, V_2, V_3). Funkcja zwraca wartość potencjału – jeżeli punkt należy do elementu albo wartość **NaN** – jeżeli punkt nie należy do elementu. Funkcja **mesV** wykorzystuje wcześniej napisane funkcje do sprawdzenia położenia punktu. Do obliczenia potencjału wykorzystuje równanie (8).

7. Wczytaj dane zapisane w pliku V0.mat i wyświetl na rysunku siatkę elementów skończonych oraz wartości potencjału V0 dla punktów określonych współrzędnymi zapisanymi w danych x i y:

```
clear; close all; clc
load V0;            % plik pobierz ze strony: ks.zut.edu.pl/mm/V0.mat
t(4,:) = t(1,:);
figure(1), hold on,
for w = 1:size(t,2),
   plot(p(1,t(1:4,w)),p(2,t(1:4,w))),
   text(mean(p(1,t(1:3,w))),mean(p(2,t(1:3,w))),num2str(w)),
end
axis equal tight;
figure(2), surf(x,y,reshape(V0,5,5));
set(gca,'YDir','reverse'); axis equal tight;
colorbar
```

8. Wykorzystaj funkcje **mesSPR** i **mesV** do wykonania aproksymacji dla innych współrzędnych:

```
x=0:3:30;  y=0:3:30;  VV(1:length(x),1:length(y))=NaN;
for k = 1:length(x),
 for w = 1:length(y),
  for e = 1:size(t,2),
   if mesSPR(p(1,t(1:3,e)),p(2,t(1:3,e)),x(k),y(w))
    VV(w,k)=mesV(p(1,t(1:3,e)),p(2,t(1:3,e)),x(k),y(w),V0(t(1:3,e)));
   end
  end
 end
end
figure(3),
surf(x,y,VV);
axis equal tight;
colorbar
```

Wybrana literatura

1. Zienkiewicz, O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.
2. Kiełbasiński A., Schwetlick H.: *Numeryczna algebra liniowa* WNT, Warszawa1992
3. Kosma Z.: *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 1999
4. Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*, WNT, Warszawa 1992
5. Grzymkowski R., Hetmaniok E., Słota D.: *Wybrane metody obliczeniowe w rachunku wariacyjnym oraz w równaniach różniczkowych i całkowych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej J. Skalmierskiego, Gliwice 2002
6. Grzymkowski R., Kapusta A., Nowak I., Słota D.: *Metody numeryczne. Zagadnienia brzegowe*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2003

Przykładowe dane do zadań

Zadanie 4

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$ prawidłowe rozwiązanie: $N = [0.2\ \ 0.6\ \ 0.2]$
$x = 2$, $y = 1$, czyli: $N_1 = 0.2$, $N_2 = 0.6$, $N_3 = 0.2$

Zadanie 5

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$x = 2$, $y = 1$, prawidłowe rozwiązanie: 1 – *Punkt leży wewnątrz elementu.*

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$x = 1.5$, $y = 0$, prawidłowe rozwiązanie: 1 – *Punkt leży na krawędzi elementu.*

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$x = 1$, $y = -1$, prawidłowe rozwiązanie: 0 – *Punkt znajduje się poza elementem.*

Zadanie 6

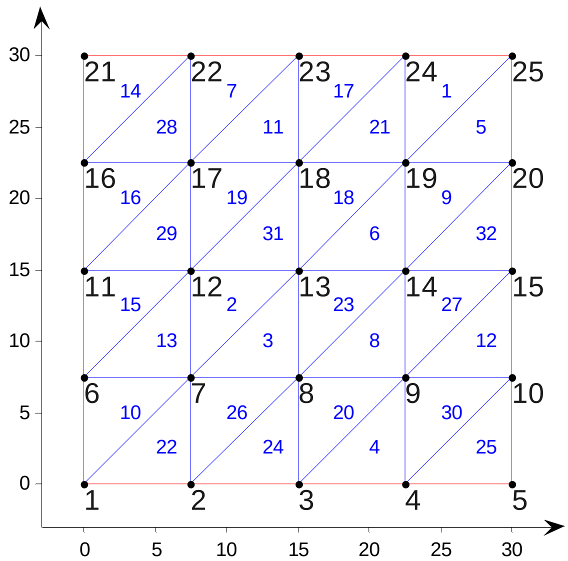
$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$V_1 = 5$, $V_2 = 3.366$, $V_3 = 4.257$
$x = 2$, $y = 1$, prawidłowe rozwiązanie: $V = 3.871$

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$V_1 = 5$, $V_2 = 3.366$, $V_3 = 4.257$
$x = 1.5$, $y = 0$, prawidłowe rozwiązanie: $V = 4.183$

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$,
$y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$
$V_1 = 5$, $V_2 = 3.366$, $V_3 = 4.257$
$x = 10$, $y = 0$, prawidłowe rozwiązanie: $V = \text{NaN}$

Zadanie 7

Rysunek przedstawia obszar obliczeń podzielony na elementy skończone, z zaznaczonymi węzłami. W pliku V0.mat są zapisane wartości potencjału V0 w węzłach (macierz kolumnowa **`V0`** - 25 wartości), współrzędne węzłów (w macierzach **`x`**, **`y`** i **`p`**) oraz węzły tworzące kolejne elementy (macierz **`t`**).



Rys. 4 Siatka MES dla zadań 1, 7 i 8.