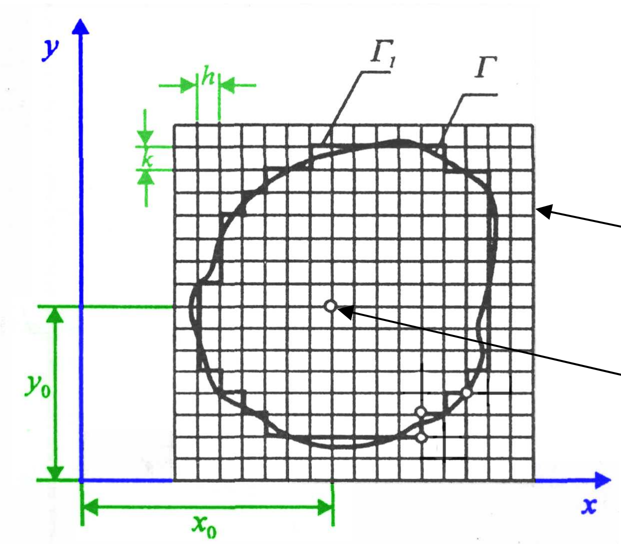
Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych jest jedną z najstarszych metod numerycznych wykorzystywanych do rozwiązywania zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi. Polega ona na przechodzeniu w równaniu różniczkowym od pochodnych do odpowiednich ilorazów różnicowych - czyli przejściu od równań różniczkowych do równań różnicowych, które wiążą ze sobą wartości szukanej funkcji w wybranych punktach. W przeciwieństwie do metod analitycznych, rozwiązanie otrzymuje się nie w całym rozpatrywanym obszarze, ale tylko w pewnych jego punktach, zwanych węzłami. Sposób wyboru tych punktów zależy między innymi od układu współrzędnych przyjętego do rozwiązania zagadnienia. Zbiór wszystkich węzłów określonych dla danego obszaru nazywamy siatką, która w metodzie różnic skończonych jest regularna. W przedstawionym poniżej przykładzie siatka jest kwadratowa i dla takiej siatki wyprowadzone tu zależności są prawdziwe.

Rozważamy obszar na płaszczyźnie $x0y$, w którym potencjał skalarny V spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V = 0. \tag{1}$$



Γ – brzeg obszaru obliczeń

Γ_1 – brzeg przybliżony

siatka: podział obszaru obliczeń

k, h – skok siatki

węzeł: punkt przecięcia linii siatki

x_0, y_0 – współrzędne węzła

Rys. 1 Podział obszaru obliczeń

W kartezjańskim układzie współrzędnych laplasjan wyrażamy następująco:

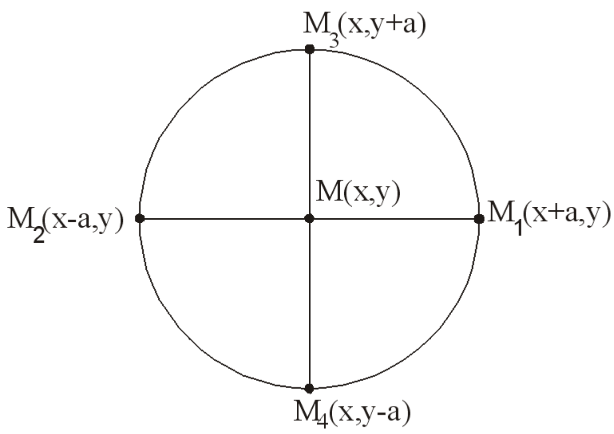
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \tag{2}$$

zatem równanie Laplace'a zapiszemy:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

ZADANIE

Znaleźć rozkład skalarnego potencjału elektrycznego $V(x,y)$ w obszarze ograniczonym brzegiem Γ, w którym jest spełnione równanie Laplace'a i są dane warunki brzegowe (czyli na brzegu Γ jest znana wartość potencjału, lub jego pochodna).



Rys. 2 Węzeł M i węzły sąsiednie

Aby rozwiązać to zadanie metodą różnic skończonych nakładamy na obszar obliczeń siatkę, stanowiącą podział tego obszaru na mniejsze podobszary. Rozwiązania zadania będziemy poszukiwać w wybranych punktach obszaru – węzłach, wyznaczanych przez siatkę. Rozpatrzymy potencjał w węźle M, o współrzędnych x,y oraz w węzłach bezpośrednio z nim sąsiadujących (M_1, M_2, M_3 i M_4). W równaniu (3) występują drugie pochodne potencjału. Wyznaczymy je w punkcie M, zakładając, że znamy potencjał w tym punkcie.

Niech potencjał w punkcie M(x,y) wynosi $V(x,y)$. Potencjały w punktach sąsiednich M_1, M_2, M_3, M_4 (rys.2) otrzymamy rozwijając $V(x + a, y)$ w szereg Taylora:

$$V(x+a,y)=V(x,y)+a\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\ldots \tag{4}$$

W ten sam sposób, rozwijając $V(x - a, y)$:

$$V(x-a,y)=V(x,y)-a\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\ldots \tag{5}$$

Jeżeli ograniczymy się do trzech pierwszych wyrazów rozwinięcia i dodamy powyższe równania stronami to możemy napisać następującą zależność na drugą pochodną po x:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cong\frac{V(x+a,y)+V(x-a,y)-2V(x,y)}{a^2} \tag{6}$$

Podobnie możemy otrzymać wyrażenie na drugą pochodną po y:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cong\frac{V(x,y+a)+V(x,y-a)-2V(x,y)}{a^2} \tag{7}$$

Możemy już teraz zapisać przybliżone wyrażenie na Laplasjan potencjału skalarnego $V(x,y)$:

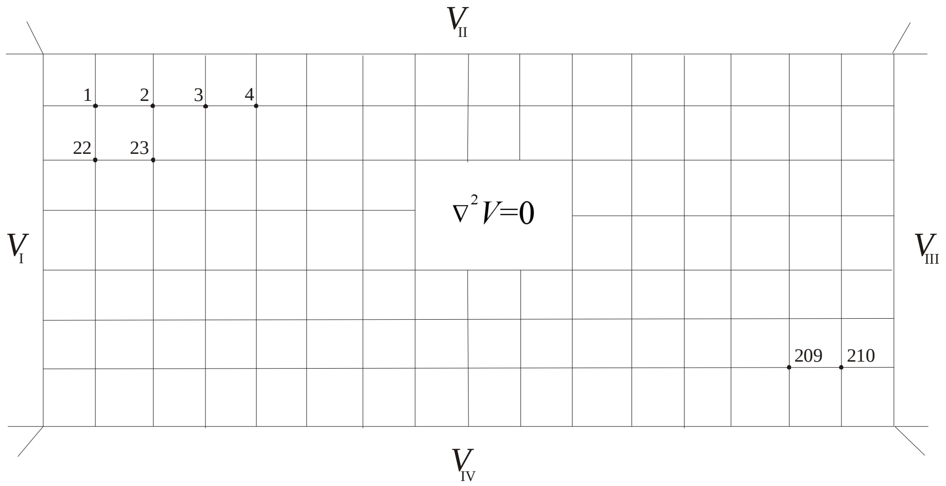
$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cong\frac{1}{a^2}\left[V(x+a,y)+V(x-a,y)+V(x,y+a)+V(x,y-a)-4V(x,y)\right] \tag{8}$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (3) i znajdujemy potencjał w punkcie M(x,y), wyrażony za pomocą wartości potencjałów w punktach sąsiednich. Odpowiednikiem równania różniczkowego cząstkowego Laplace'a $\nabla^2 V = 0$ jest więc następujące równanie różnicowe:

$$V\cong\frac{1}{4}\left[V(x+a,y)+V(x-a,y)+V(x,y+a)+V(x,y-a)\right] \tag{9}$$

PRZYKŁAD 1

Wewnątrz obszaru ograniczonego czterema ścianami o danych potencjałach V_{I}, V_{II}, V_{III}, V_{IV} skalarny potencjał elektryczny V spełnia równanie Laplace'a.



Rys. 3 Prostokątny obszar obliczeń, ze znanymi wartościami potencjału na brzegach

Przy przybliżonym wyznaczaniu rozkładu potencjału, dla każdego z 210 punktów, powstałych przy podziale rozważanego obszaru kwadratową siatką, możemy zapisać równania:

$$V_1 = \frac{1}{4}\left(V_2 + V_{\mathrm{I}} + V_{\mathrm{II}} + V_{22}\right) \tag{10}$$

$$V_2 = \frac{1}{4}\left(V_3 + V_1 + V_{\mathrm{II}} + V_{23}\right) \tag{11}$$

....

$$V_{210} = \frac{1}{4}\left(V_{\mathrm{III}} + V_{209} + V_{189} + V_{\mathrm{IV}}\right) \tag{12}$$

Równanie różniczkowe cząstkowe Laplace'a zostało zastąpione układem 210 równań algebraicznych, liniowych, z 210 niewiadomymi potencjałami. Równania te możemy uporządkować i zapisać w postaci macierzowej, a następnie rozwiązywać korzystając z dowolnej metody rozwiązywania układów równań. Jako wyniki uzyskamy wartości potencjałów we wszystkich węzłach analizowanego obszaru.

PYTANIA NA WEJŚCIÓWKĘ: METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych należy do numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Stosuje się w niej przekształcenie zadanego równania.

1. Co uzyskuje się w wyniku tego przekształcenia (co jest faktycznie rozwiązywane: równanie różniczkowe, równanie algebraiczne, układ równań, pochodna, całka)?
2. Co (oprócz równania różniczkowego) jest potrzebne do rozwiązania zadania?
3. Co jest wynikiem obliczeń tą metodą? Czy rozwiązanie uzyskuje się w postaci jednej funkcji, w postaci kilku funkcji, w postaci liczby, czy w postaci zbioru liczb?
4. Wyjaśnij pojęcia „siatka”, „węzły”, oraz „warunki brzegowe”.
5. Co to są „warunki brzegowe”?
6. Co to są „warunki brzegowe Dirichleta” i „warunki brzegowe Neumanna”?
7. Zapisz równanie (9) dla potencjału w wybranym węźle, w rozpatrywanym powyżej przykładzie.
8. Oblicz wartość potencjału w węźle 2, zakładając, że wartości potencjałów w węzłach sąsiadujących z nim są znane.