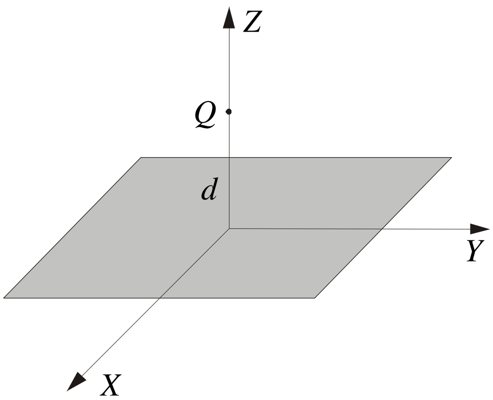
Metoda odbić zwierciadlanych

Przypuśćmy, że ładunek punktowy Q (Rys. 1) umieszczony jest w odległości d od nieskończonej powierzchni przewodzącej, umiejscowionej na płaszczyźnie $X0Y$. Pierwsze pytanie, jakie od razu się nasuwa jest następujące: Jaki jest potencjał V oraz natężenie $\boldsymbol{E}$ w obszarze nad płaszczyzną? Nie mogą one pochodzić tylko od ładunku Q, ponieważ Q wyindukuje na powierzchni przewodnika pewien ładunek o znaku przeciwnym. W związku z tym całkowity potencjał oraz natężenie będą sumą potencjałów i natężeń pochodzących bezpośrednio od Q i od ładunku indukowanego. Ale jak można obliczyć te wielkości, skoro nie wiadomo jak duży jest wyindukowany ładunek i jaki jest jego rozkład?



Rys.1 Ładunek Q w odległości d nad powierzchnią przewodzącą

Z pomocą przychodzi nam metoda odbić zwierciadlanych. Metoda ta polega na zastąpieniu powierzchni przewodzącej równoważnymi jej ładunkami pozornymi (tzw. urojonymi lub zwierciadlanymi). Muszą one wytworzyć takie samo pole jak to, które zostało wytworzone przez ładunki rzeczywiste, wyindukowane na powierzchni przewodzącej.

Po wyznaczeniu rozkładu ładunków zwierciadlanych zagadnienie rozwiązujemy dalej tak, jakby w układzie nie występowała powierzchnia przewodząca, a pole było wytwarzane przez ładunki pierwotne i zwierciadlane.

Klasyczna procedura znajdowania rozkładu pola w takim układzie polegałaby na napisaniu odpowiednich równań Maxwella i rozwiązaniu ich przy uwzględnieniu warunków brzegowych zagadnienia. Jest to bardzo trudne, ponieważ nieznany jest rozkład ładunków na powierzchni przewodzącej. Funkcję opisującą rozkład pola i spełniającą równania Maxwella oraz warunki brzegowe, spróbujemy znaleźć korzystając z twierdzenia o jednoznaczności. Twierdzenie to mówi, że jeżeli znajdziemy jakąkolwiek funkcję spełniającą równania Maxwella oraz warunki brzegowe postawione w zadaniu to funkcja ta jest jedynym słusznym rozwiązaniem. Tutaj warunkiem brzegowym jest zerowanie się składowej stycznej $\boldsymbol{E}$ na powierzchni przewodzącej.

Fakt zerowania się składowej stycznej wektora natężenia pola elektrycznego wynika z tego, iż w zagadnieniach elektrostatyki, na powierzchni przewodzącej istnieje potencjał o stałej wartości – powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną. Występuje tylko składowa normalna wektora natężenia pola elektrycznego.

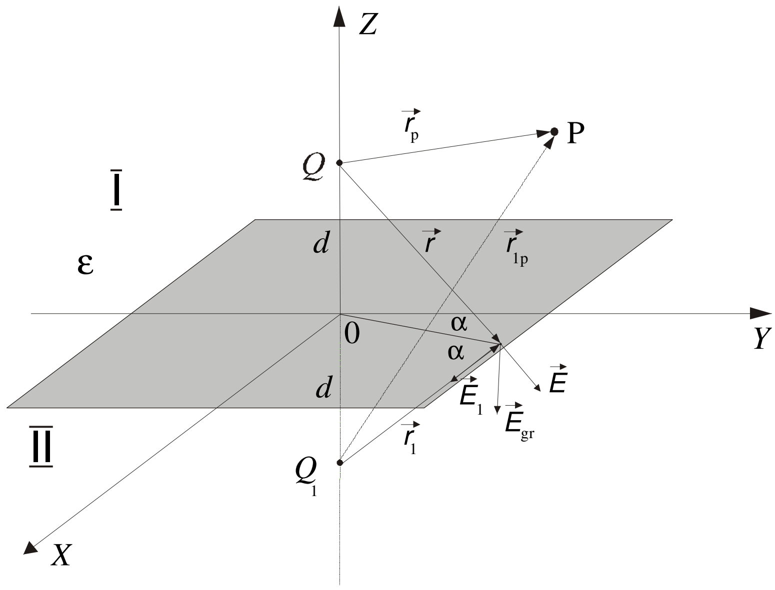
Warunek zerowania się składowej stycznej wektora $\boldsymbol{E}$ na płaszczyźnie $X0Y$ będzie spełniony także wtedy, gdy działanie przewodzącej powierzchni zastąpimy fikcyjnym ładunkiem $Q_1 = -Q$ umieszczonym w odległości d pod płaszczyzną $X0Y$, przy założeniu że przenikalność elektryczna całej przestrzeni jest równa ε (zob. Rys. 2 na następnej stronie).

W takim przypadku, na płaszczyźnie $X0Y$ natężenie pola elektrycznego od dwóch ładunków punktowych jest superpozycją natężeń pól od każdego ładunku i wynosi:

(1)
$$\vec{E}_{gr} = \vec{E} + \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{1}_r + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_1^2}\vec{1}_{r_1}.$$

Składowa styczna wektora $\boldsymbol{E}_{\mathrm{gr}}$ do płaszczyzny $X0Y$ równa się:

(2)
$$E_{grstycz} = E_{stycz} + E_{1stycz} = E\cdot\cos\alpha + E_1\cdot\cos\alpha.$$



Rys. 2 Ładunek rzeczywisty Q oraz ładunek urojony Q_1 „odbity” względem powierzchni przewodzącej, umiejscowionej na płaszczyźnie $X0Y$

Obydwie składowe tworzą z płaszczyzną $X0Y$ taki sam kąt α ($r = r_1$, bo ładunek Q_1 jest tak samo oddalony od płaszczyzny jak ładunek Q). Z podobieństwa trójkątów możemy napisać:

(3)
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}.$$

Biorąc powyższe zależności oraz uwzględniając, że składowa styczna wektora $\boldsymbol{E}_{gr} = 0$ otrzymamy:

(4)
$$\frac{Q\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\varepsilon r^3} + \frac{Q_1\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\varepsilon r^3} = 0,$$

a stąd:

(5)
$$Q_1 = -Q.$$

Wykazaliśmy więc spełnienie warunków zadania. Zastąpienie przewodzącej płaszczyzny ładunkiem Q_1 nie zmienia postawionych warunków brzegowych, a tym samym nie zmienia rozkładu pola nad tą płaszczyzną.

W dowolnym punkcie przestrzeni nad płaszczyzną $X0Y$, tj. w obszarze, w którym umieszczony jest ładunek Q natężenie pola elektrostatycznego można opisać:

(6)
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_p{}^2}\vec{1}_{r_p} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_{1p}{}^2}\vec{1}_{r_{1p}}.$$

Potencjał opisany jest:

(7)
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_p} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_{1p}}.$$

Wartość potencjału w punkcie $\mathrm{P}(x, y, z)$ wynosi:

(8)
$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}\right].$$

Korzystając z (1) wyznaczymy wartość składowej normalnej na powierzchni $X0Y$:

(9) $$E_{grnorm} = E_{norm} + E_{1norm} = E \cdot \sin\alpha + E_1 \cdot \sin\alpha .$$

Analogicznie jak dla składowej stycznej można napisać:

(10) $$\sin\alpha = \frac{d}{r} .$$

Uwzględniając, że $r^2 = x^2 + y^2 + d^2$ oraz $Q_1 = -Q$, otrzymamy:

(11) $$E_{grnorm} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \frac{d}{r} - \frac{-Q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \frac{d}{r} = \frac{Qd}{2\pi\varepsilon \left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}} .$$

Wyznaczone powyżej zależności wykorzystamy do obliczeń w programie MATLAB. W tym celu napiszemy funkcję, która umożliwi nam obliczenie potencjału z równania (8):

```
function V = metoda_odbic(Q,d,epsilon,x,y,z)

V = 1./(4*pi*epsilon).*...
    (Q./sqrt(x.^2+y.^2+(z-d).^2)...
    -(Q./sqrt(x.^2+y.^2+(z+d).^2)));
```

Do obliczenia natężenia pola elektrycznego będziemy wykorzystywać również poprzednio zapisane funkcje: `pochodna2` oraz `natezeniepola`. Jeśli nie ma ich na dysku twardym komputera, to należy je ponownie zapisać (skompilowane pliki są na stronie: ks.zut.edu.pl/mmwe/nazwafunkcji.p).

```
function d = pochodna2(x,y)

Lx = length(x);
dx = x(3:Lx)-x(1:Lx-2);
dy = y(3:Lx)-y(1:Lx-2);
d = [NaN dy./dx NaN];
```

```
function [Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V)

for k=1:length(y)
  Ex(k,:) = -pochodna2(x,V(k,:));
end

for k=1:length(x)
  Ey(:,k) = -pochodna2(y,V(:,k)');
end
```

ZADANIE 1

Ładunek Q = 1.6 C znajduje się w dielektryku o przenikalności elektrycznej $\varepsilon = \varepsilon_0$ w odległości d od płaszczyzny przewodzącej (Rys. 2). Wyznacz pole w dielektryku. Przedstaw potencjał V i natężenie pola $\boldsymbol{E}$ na rysunku, na płaszczyźnie $X0Z$ (dla y = 0). Wyznacz gęstość powierzchniową ładunków, które powstaną na powierzchni oddzielającej dwa środowiska i siłę działającą na ładunek Q.

ROZWIĄZANIE

W oknie „Command Window” wprowadzamy dane do zadania oraz definiujemy obszar obliczeń:

```
clear,              % usuwa wszystkie zapamiętane zmienne
close all           % zamyka wszystkie rysunki
x = -9:0.2:2;       % wartości x obszaru obliczeń [mm]
y = 0;              % wartość y obszaru obliczeń [mm]
z = 0:0.2:7;        % wartości z obszaru obliczeń [mm]
[X,Z] = meshgrid(x,z); % tworzy obszar obliczeń - płaszczyzna XZ
Q = 1.6;                 % wartość ładunku
d = 5;                   % odległość w osi Z
epsilon = 8.854e-12;     % przenikalność elektryczna dla powietrza
```

a następnie obliczamy wartości potencjału dla każdej wartości *x* i *z*:

```
for w = 1:length(z),                   % pętla po w: dla każdego z
 for k = 1:length(x),                  % pętla po k: dla każdego x
  V(w,k) = metoda_odbic(Q,d,epsilon,x(k),y,z(w)); % obliczenia
 end                                   % koniec pętli po k
end                                    % koniec pętli po w
```

i rysujemy wykres potencjału za pomocą funkcji `pcolor`:

```
pcolor(X,Z,V)        % rysuje wartości V na płaszczyźnie X0Z
axis equal           % ustawia równe skale na osiach
axis tight           % dopasowuje rozmiar układu współrzędnych
shading flat         % cieniowanie wykresu bez interpolacji
```

Na rysunku widzimy rozkład potencjału wokół ładunku. Przyjmijmy teraz, że ładunek jest umieszczony nieco dalej od płaszczyzny $X0Y$ (w odległości d = 12) i dla takiej sytuacji rozwiążemy zadanie do końca:

```
d = 12;
for w = 1:length(z),                   % pętla po w: dla każdego z
 for k = 1:length(x),                  % pętla po k: dla każdego x
  V(w,k) = metoda_odbic(Q,d,epsilon,x(k),y,z(w));
 end                                   % koniec pętli po k
end                                    % koniec pętli po w

pcolor(X,Z,V)        % rysuje wartości V na płaszczyźnie X0Z
axis equal           % ustawia równe skale na osiach X i Z
axis tight           % dopasowuje rozmiar układu współrzędnych
shading flat         % ustawia kolorowanie wykresu bez interpolacji
hold on              % podtrzymuje bieżący wykres
[Ex,Ey] = natezeniepola(x,z,V);
h = quiver(X,Z,Ex,Ey);
set(h,'AutoScaleFactor',1.5, 'color',[1 1 1]);
```

Znając rozkład E i V można wyznaczyć gęstość powierzchniową ładunków, które powstaną na powierzchni oddzielającej dwa środowiska. Z warunków ciągłości wektora E przy przejściu przez płat ładunku powierzchniowego z obszaru I do II wynika, że gęstość ładunku powierzchniowego jest proporcjonalna do nieciągłości składowej normalnej E:

$$\varepsilon(E_{IIn} - E_{In}) = \sigma. \tag{12}$$

Ponieważ w obszarze II pole nie istnieje ($E_{IIn} = 0$), to powierzchniowa gęstość ładunku wyraża się następująco:

(13)
$$\sigma = -\varepsilon E_{ngr} = -\frac{Qd}{2\pi r^3} = -\frac{Qd}{2\pi\left[x^2 + y^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Ładunek Q przyciągany jest przez płaszczyznę, ponieważ znajduje się na niej indukowany ładunek o znaku przeciwnym. Siłę tego przyciągania można obliczyć:

(14)
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{-Q \cdot Q}{(2d)^2} \cdot \vec{1}_z$$

Ponieważ wektor siły jest skierowany równolegle do osi Z ze zwrotem przeciwnym, to jej wartość:

(15)
$$F = -\frac{-Q \cdot Q}{4\pi\varepsilon(2d)^2} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon d^2}$$

Napisz funkcje: `ladunek` oraz `sila`, które będą obliczać wielkości wyrażone wzorami (13) oraz (15). Pamiętaj o zadeklarowaniu w nawiasie argumentów funkcji, występujących we wzorach.

```
function sigma = ladunek(   )
```

```
function F = sila(   )
```

Wykonaj obliczenia za pomocą tych funkcji. Przedstaw wyniki obliczania gęstości powierzchniowej ładunku na rysunku, na płaszczyźnie $X0Y$ (dla $z = 0$).

ZADANIE 2

Zmodyfikuj wzór (8) oraz zapisane do obliczeń funkcje tak, aby działały poprawnie dla sytuacji, gdy pojedynczy ładunek umieszczony jest nad płaszczyzną przewodzącą w dowolnym punkcie, o współrzędnych (x_0, y_0, z_0). Wykonaj obliczenia za pomocą zmienionych funkcji dla położenia ładunku w punkcie (-1, 1, 12). Przedstaw wyniki obliczania potencjału na płaszczyznach przecinających osie układu współrzędnych w różnych punktach (dla wybranej osi ustalamy punkt przecięcia – np. $y = 0$ jak w zadaniu 1, i wykonujemy obliczenia dla wybranego zakresu pozostałych zmiennych).

ZADANIE 3

Zapisz równanie dla potencjału w sytuacji, gdy ładunek znajduje się w pobliżu dwóch przewodzących płaszczyzn, stykających się pod kątem prostym. Napisz funkcję obliczającą potencjał w takim układzie i wykonaj obliczenia oraz przedstaw je na wykresie.

PYTANIA SPRAWDZAJĄCE DO TEGO ĆWICZENIA

1. Podaj wzór na potencjał pola elektrycznego V w odległości r od ładunku elektrycznego q.
2. Zastosuj podany w zadaniu 1 wzór dla kilku przykładowych wartości r oraz q.
3. Oblicz potencjał pola elektrycznego V pochodzący od kilku ładunków.
4. Podaj wzór na natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ w odległości r od ładunku elektrycznego q.
5. Podaj wzór na składowe E_x i E_y wektora $\boldsymbol{E}$ leżącego na płaszczyźnie xy, jeśli znana jest długość tego wektora i kąt α jaki tworzy on z osią x.
6. Zastosuj podane w zadaniach 4 i 5 wzory dla kilku przykładowych wartości r oraz q.
7. Oblicz natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ pochodzące od kilku ładunków (jak dodaje się wektory?).
8. Opisz (krótko, jednym zdaniem) na czym polega metoda odbić zwierciadlanych.

PYTANIA NA NASTĘPNĄ WEJŚCIÓWKĘ: METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Poszukujemy rozkładu skalarnego potencjału elektrycznego $V(x,y)$ w pewnym obszarze Ω ograniczonym brzegiem Γ. Znamy zależności między natężeniem pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ a potencjałem elektrycznym V i ładunkiem Q (lub gęstością ładunku ρ).

1. Co jest potrzebne do rozwiązania zadania metodą różnic skończonych?
2. Na czym polega rozwiązanie zadania metodą różnic skończonych? Co jest wynikiem obliczeń tą metodą (funkcja, wartość, równanie)?
3. Omów warunki brzegowe Dirichleta.
4. Omów warunki brzegowe Neumanna.
5. Czym różnią się warunki brzegowe Dirichleta od warunków Neumanna?
6. Podaj wzór na potencjał w dowolnym węźle, na podstawie potencjałów w węzłach sąsiednich.
7. Czym są siatka i węzeł w tej metodzie?