

Rotacja

ROTACJA jest operatorem różniczkowym, który jednemu polu wektorowemu przyporządkowuje inne pole wektorowe. Pole wynikowe ma zawsze kierunek prostopadły do danego pola w danym punkcie (przykład: wektor gęstości prądu \mathbf{J} i wektor natężenia pola magnetycznego \mathbf{H}). W elektrotechnice za pomocą rotacji wyrażamy związki między wielkościami wektorowymi pola elektrycznego i pola magnetycznego:

$$(1) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2) \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (3) \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

gdzie:

\mathbf{H} – wektor natężenia pola magnetycznego [A/m],

\mathbf{J} – wektor gęstości prądu [A/m²],

\mathbf{A} – wektorowy potencjał magnetyczny [Wb/m],

\mathbf{B} – wektor indukcji magnetycznej [T = Wb/m² = Vs/m²],

\mathbf{E} – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m].

Jak widać, wszystkie zmienne występujące w powyższych wzorach – zarówno argumenty rotacji na lewych stronach równań, jak i wielkości wynikowe – po prawych stronach równań – są wektorami. Podobnie jak pozostałe operatory różniczkowe (gradient i dywergencja) rotację definiuje się jako kombinację pochodnych cząstkowych z odpowiednich składowych wektora. W układzie współrzędnych kartezjańskich (x, y, z):

$$(4) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{i}}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{i}}_z,$$

w układzie współrzędnych cylindrycznych (walcowych) (r, φ, z):

$$(5) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{\mathbf{i}}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) \vec{\mathbf{i}}_z,$$

w układzie współrzędnych sferycznych (r, θ, φ):

$$(6) \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{\mathbf{i}}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right) \vec{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \vec{\mathbf{i}}_\varphi$$

Do obliczeń będziemy wykorzystywać poprzednio zapisane funkcje: `pochodna2`, która numerycznie oblicza pochodną, oraz `promien`, która liczy odległość w układzie kartezjańskim. Jeśli nie ma ich na dysku twardym komputera, to należy je ponownie zapisać.

```
function d = pochodna2(x,y)
```

```
Lx = length(x);  
dx = x(3:Lx)-x(1:Lx-2);  
dy = y(3:Lx)-y(1:Lx-2);  
d = [NaN dy./dx NaN];
```

```
function r = promien(x0,y0,xi,yi)
```

```
r = sqrt((xi-x0).^2+((yi-y0).^2));
```

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

ZADANIE 1

Oblicz natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} pochodzące od nieskończenie długiego, odosobnionego, prostoliniowego przewodu o okrągłym przekroju, wiodącego prąd stały o natężeniu I . Wykonaj wykres natężenia pola za pomocą funkcji `surf` (wartości bezwzględne) oraz `quiver` (składowe H_x i H_y). Następnie oblicz rotację z otrzymanego natężenia pola \mathbf{H} i przedstaw ją na osobnym rysunku. Przekrój przewodu wynosi $S = 0,9852 \text{ mm}^2$, prąd $I = 30\text{A}$.

Zadanie można rozpatrywać w obszarze dwuwymiarowym – na płaszczyźnie x - y lub r - φ prostopadłej do osi przewodu. W takiej sytuacji prąd będzie miał tylko składową z , a wektor natężenia pola magnetycznego będzie miał tylko dwie składowe leżące na płaszczyźnie x - y , lub jedną składową na płaszczyźnie r - φ . Natężenie pola magnetycznego w odległości r od prostoliniowego przewodu z prądem o natężeniu I wyraża się wzorem:

$$(7) \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{1}_\varphi,$$

a natężenie pola magnetycznego wewnątrz przewodu o promieniu r_0 , w odległości r od jego osi:

$$(8) \quad \mathbf{H} = \frac{I r}{2\pi r_0^2} \mathbf{1}_\varphi.$$

Napišemy funkcję `natezeniepolaH`, która będzie liczyć natężenie pola magnetycznego w odległości r od osi przewodu. Wewnątrz funkcji musimy zapewnić rozróżnienie – kiedy zastosować który z podanych powyżej wzorów. Argumentami funkcji będą: I – wartość prądu, S - przekrój przewodu, x_0, y_0 – współrzędne osi przewodu, oraz x, y – współrzędne punktu, w którym funkcja będzie liczyć natężenie pola \mathbf{H} , a dokładniej – jej składową H_φ :

```
function H = natezeniepolaH(I,S,x,y,x0,y0)

r = promien(x0,y0,x,y);      % wywołanie funkcji „promien”
r0= sqrt(S/pi);             % obliczenie promienia przewodu

if r<r0,
    H = I*r/(2*pi*r0^2);    % wzór (8)
else
    H = I/(2*pi*r);        % wzór (7)
end
```

W oknie „Command Window” wprowadzamy dane do zadania oraz definiujemy obszar obliczeń:

```
I = 30;                      % wartość prądu
S = 0.9852;                  % przekrój przewodu w mm2
x = -6:0.1:6;                % wartości x obszaru obliczeń [mm]
y = -4:0.1:4;                % wartości y obszaru obliczeń [mm]
[X,Y] = meshgrid(x,y);      % obszar obliczeń
```

a następnie obliczamy wartości pola, zakładając, że oś przewodu przechodzi przez punkt (0; 0):

```
for w = 1:length(y),        % pętla po w: dla każdego y
    for k = 1:length(x),    % pętla po k: dla każdego x
        H(w,k) = natezeniepolaH(I,S,x(k),y(w),0,0);
    end                    % koniec pętli po k
end                        % koniec pętli po w
```

i rysujemy wykres wartości bezwzględnej natężenia pola za pomocą funkcji surf:

```
surf(X,Y,H)           % rysuje wartości bezwzględne H
axis equal            % ustawia równe skale na osiach X, Y i Z
axis tight           % dopasowuje rozmiar układu współrzędnych
shading flat         % ustawia kolorowanie wykresu bez interpolacji
```

Do przedstawienia wykresu natężenia pola za pomocą funkcji quiver czyli w postaci wektorów, potrzebujemy składowych H_x i H_y , które należy policzyć przekształcając \mathbf{H} z układu współrzędnych (r, φ) w układ (x, y) . Współrzędne przekształcamy poleceniem cart2pol, które dla współrzędnych X, Y oblicza odpowiadające im współrzędne FI, R:

```
[FI,R] = cart2pol(X,Y);
Hx = -H.*sin(FI); Hy = H.*cos(FI);
```

Wykres wektorów rysujemy poleceniem quiver:

```
figure                % otwiera nowy, pusty rysunek
quiver(X,Y,Hx,Hy);   % wykres wektorów H (strzałki)
axis equal            % ustawia równe skale na osiach X i Y
axis tight           % dopasowuje rozmiar płaszczyzny XY do wykresu
```

Napiżemy teraz funkcję, która będzie liczyć rotację w obszarze dwuwymiarowym x - y . W tym zadaniu wzór (4) na rotację w układzie kartezjańskim zredukuje się do jednego członu.

```
function Jz = rotacja(x,y,Hx,Hy)

for w=1:length(y)
    dHyx(w,:) = pochodna2(x,Hy(w,:));
end

for k=1:length(x)
    dHxy(:,k) = pochodna2(y,Hx(:,k)');
end

Jz = dHyx - dHxy;
```

Obliczamy rotację z H i wynik przedstawiamy na wykresie:

```
figure                % otwiera nowy, pusty rysunek
Jz = rotacja(x,y,Hx,Hy); % wywołanie funkcji „rotacja”
surf(X,Y,Jz)         % rysuje wartości Jz
axis equal            % ustawia równe skale na osiach X i Y
axis tight           % dopasowuje rozmiar płaszczyzny XY do wykresu
shading flat         % kolorowanie bez interpolacji, bez siatki
```

Rotacja natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} daje gęstość prądu \mathbf{J} w obszarze, w którym jest liczona. Powinniśmy zatem uzyskać na ostatnim rysunku koło o polu równym S , na którym obliczone wartości są maksymalne, a na zewnątrz którego obliczone wartości będą zerowe. Możemy sprawdzić jaka jest wartość maksymalna obliczonej przez rotację gęstości prądu:

```
Jmax = max(max(Jz))
```

i porównać ją z wartością gęstości prądu jaka jest w przewodzie o przekroju S , gdy prąd ma wartość I :

```
J = I/S
```

ZADANIE 2

Oblicz natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} pochodzące od nieskończenie długiego, odosobnionego, prostoliniowego przewodu o okrągłym przekroju, wiodącego prąd stały o natężeniu I . Oś przewodu jest prostopadła do płaszczyzny xy i przecina ją w punkcie o współrzędnych $(x_0, y_0) = (-3; 2)$. Wykonaj wykres natężenia pola za pomocą funkcji `surf` (wartości bezwzględne) oraz `quiver` (składowe H_x oraz H_y). Następnie oblicz rotację z otrzymanego natężenia pola \mathbf{H} i przedstaw ją na osobnym rysunku za pomocą funkcji `surf` lub `pcolor`. Przekrój przewodu wynosi $S = 0,9852 \text{ mm}^2$, prąd $I = 5\text{A}$. Obliczenia wykonaj w obszarze zdefiniowanym w poprzednim zadaniu (dla x zmieniających się od -6 do 6 co 0.1, oraz y zmieniających się od -4 do 4 co 0.1).

Uwaga: funkcja `cart2pol` przekształca współrzędne z układu (x, y) na układ (r, φ) . Działa ona prawidłowo, jeżeli środki obu układów współrzędnych leżą w tym samym punkcie. Jeżeli środki układów współrzędnych są przesunięte względem siebie, to należy to uwzględnić przesuwając odpowiednio argumenty funkcji – współrzędne x oraz y . W zadaniu 2 środkiem układu współrzędnych dla przewodu jest punkt, w którym jego oś przecina płaszczyznę xy .

ZADANIE 3

Oblicz natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} pochodzące od dwóch nieskończenie długich, prostoliniowych przewodów o okrągłych przekrojach, wiodących w przeciwnych kierunkach prąd stały o natężeniu I . Wykonaj wykres natężenia pola za pomocą funkcji `surf` (wartości bezwzględne) oraz `quiver` (składowe H_x i H_y). Następnie oblicz rotację z otrzymanego natężenia pola \mathbf{H} i przedstaw ją na osobnym rysunku za pomocą funkcji `surf` lub `pcolor`. Przekrój przewodów wynosi $S = 0,9852 \text{ mm}^2$, prąd $I = 5 \text{ A}$. Współrzędne osi przewodów: $(-2; 1)$ i $(2; -1)$.

PYTANIA NA NASTĘPNĄ WEJŚCIÓWKĘ: METODA ODBIĆ ZWIERCIADLANYCH

1. Podaj wzór na potencjał pola elektrycznego V w odległości r od ładunku elektrycznego q .
2. Zastosuj podany w zadaniu 1 wzór dla kilku przykładowych wartości r oraz q .
3. Oblicz potencjał pola elektrycznego V pochodzący od kilku ładunków.
4. Podaj wzór na natężenie pola elektrycznego E w odległości r od ładunku elektrycznego q .
5. Podaj wzór na składowe x i y wektora leżącego na płaszczyźnie xy , jeśli znana jest jego długość i kąt α jaki tworzy on z osią x .
6. Zastosuj podane w zadaniach 4 i 5 wzory dla kilku przykładowych wartości r oraz q .
7. Oblicz natężenie pola elektrycznego E pochodzące od kilku ładunków (jak dodaje się wektory?).
8. Opisz (krótko, jednym zdaniem) na czym polega metoda odbić zwierciadlanych.