Dywergencja

DYWERGENCJA jest operatorem różniczkowym, który danemu polu wektorowemu przypisuje odpowiednie pole skalarne. W zastosowaniach fizycznych argument dywergencji – pole wektorowe – jest zwykle strumieniem jakiejś wielkości (np. pola elektrycznego) a wynikowa wielkość skalarna niesie informację o źródle tego strumienia (np. o ładunku elektrycznym). W odniesieniu do wielkości elektrycznych za pomocą dywergencji określamy zależność między indukcją pola elektrycznego $\boldsymbol{D}$, a gęstością objętościową ładunku ρ, który jest źródłem pola elektrycznego:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho.$$

Dywergencję definiuje się jako kombinację pochodnych cząstkowych. W układzie współrzędnych kartezjańskich:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

W innych układach współrzędnych dywergencja również jest definiowana za pomocą kombinacji pochodnych cząstkowych. Na zajęciach przeanalizujemy dywergencję na przykładach tylko w układzie kartezjańskim.

Do obliczeń będziemy wykorzystywać poprzednio zapisane funkcje: `pochodna2` oraz `natezeniepola`. Jeśli nie ma ich na dysku twardym komputera, to należy je ponownie zapisać.

```
function d = pochodna2(x,y)

Lx = length(x);
dx = x(3:Lx)-x(1:Lx-2);
dy = y(3:Lx)-y(1:Lx-2);
d = [NaN dy./dx NaN];
```

```
function [Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V)

for i=1:length(y)
  Ex(i,:) = -pochodna2(x,V(i,:));
end

for i=1:length(x)
  Ey(:,i) = -pochodna2(y,V(:,i)');
end
```

Przykładowe obliczenia dywergencji będziemy wykonywać dla pola elektrycznego. Będziemy posługiwać się wielkościami charakteryzującymi to pole:

q - ładunek elektryczny [C],

ρ - gęstość objętościowa ładunku [C/m^3],

V - potencjał elektryczny [V],

$\boldsymbol{E}$ - natężenie pola elektrycznego (wektor) [V/m],

$\boldsymbol{D}$ - indukcja pola elektrycznego (wektor) [C/m^2], Wykorzystamy również funkcje obliczające pole elektryczne napisane na poprzednich zajęciach (jeśli nie ma ich na dysku twardym komputera, to należy je ponownie zapisać) i obliczymy pole pochodzące od kilku ładunków elektrycznych:

$$r_i=\sqrt{\left(x_i-x_0\right)^2+\left(y_i-y_0\right)^2}$$

```
function r = promien(x0,y0,xi,yi)

r = sqrt((xi-x0).^2+((yi-y0).^2));
```

$$V_i=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i}$$

```
function V = potencjal(q,r)

V = q./(4*pi*8.854e-12*r);
```

PRZYKŁAD 1

W oknie „Command Window” zdefiniujemy ładunki, ich położenie oraz obszar obliczeń:

```
q = [1 1 -2]*1e-9;   % wartości ładunków
xi = [0 -1 1];       % położenia ładunków w osi X
yi = [sqrt(3) 0 0];  % położenia ładunków w osi Y
x = -1.205:0.03:1.2; % obszar obliczeń
y = -0.2:0.03:1.9;
```

i obliczymy potencjał (poniższe komendy proszę zapisać w skrypcie `liczV.m`, a następnie go wykonać).

```
kolumna = 1;
for x0=x,
  wiersz = 1;
  for y0=y,
    r= promien(x0,y0,xi,yi);
    v = potencjal(q,r);        % <- małe v, potencjały od ładunków
    V(wiersz,kolumna) = sum(v);% <- DUŻE V = suma v od poszczegól-
    wiersz = wiersz+1;         %              nych ładunków
  end
  kolumna = kolumna+1;
end
```

Zrobimy wykres potencjału oraz natężenia pola:

```
pcolor(x,y,V)        % rysuje wartości potencjału
axis equal           % ustawia równe skale na osiach X i Y
axis tight           % dopasowuje rozmiar płaszczyzny XY do wykresu
shading flat
[Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
hold on
h = quiver(X,Y,Ex,Ey); % wykres wektorów E (strzałki)
set(h,'AutoScaleFactor',2,'color',[0 0 0]); % parametry strzałek
```

Komenda `colorbar` pozwala zobaczyć wartości potencjału odpowiadające kolorom na wykresie.

Napiszemy teraz funkcję, która będzie liczyć dywergencję w obszarze dwuwymiarowym:

```
function ro = dywergencja(x,y,Dx,Dy)

for i=1:length(y)
  rox(i,:) = pochodna2(x,Dx(i,:));
end

for i=1:length(x)
  roy(:,i) = pochodna2(y,Dy(:,i)');
end

ro = rox + roy;
```

Z zależności:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

obliczymy wartości składowych indukcji elektrycznej `Dx`, `Dy`, które wykorzystamy licząc dywergencję:

```
ro = dywergencja(x,y,Ex*8.854e-12,Ey*8.854e-12);
```

Wynik obliczeń przedstawimy na osobnym rysunku:

```
figure(2)           % otwiera nowy, pusty rysunek
pcolor(x,y,ro)      % rysuje wartości potencjału
colorbar
axis equal
axis tight
shading flat
```

Na rysunku (`Figure 2`) widzimy obraz gęstości ładunków. Jeśli wszystkie obliczenia zostały wykonane poprawnie, to w prawym dolnym rogu – w pobliżu punktu o współrzędnych $(1, 0)$, powinien być widoczny obszar o ujemnej gęstości ładunku, a także powinny być widoczne dwa obszary o dodatniej gęstości ładunku – w pobliżu punktów $(-1, 0)$ oraz $(0, \sqrt{3})$.

Przykład 2

Przyjrzymy się dokładniej dywergencji z indukcji elektrycznej licząc pole pochodzące od dwóch ładunków elektrycznych o przeciwnych znakach, umieszczonych na osi X, w punktach -0.1 i +0.1:

```
clear; close all
x = -0.20025:2e-3:0.2;
y = -0.20025:2e-3:0.2;
q = [1e-9 -1e-9];
xi = [-0.1 0.1];
yi = [0 0];

liczV
[Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V);
ro = dywergencja(x,y,Ex*8.854e-12,Ey*8.854e-12);

pcolor(x,y,ro)
colorbar
axis equal
axis tight
shading flat
```

Przykład 3

W takim samym obszarze, jak w poprzednim przykładzie (nie zmieniamy wartości x i y) obliczymy gęstość ładunku w sytuacji, gdy pole wytwarzane jest przez cztery ładunki o wartościach: 1nC, -3nC, 1nC oraz 1nC, umieszczone w punktach: (-0.1; 0), (0.1; 0), (0.15; 0.1) oraz (0.15; -0.1).

```
close all
q = [1 -3 1 1]*1e-9;
xi = [-0.1 0.1 0.15 0.15];
yi = [0 0 0.1 -0.1];

liczV
figure(1)
pcolor(x,y,V)
colorbar
axis equal
axis tight
shading flat

[Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V);
ro = dywergencja(x,y,Ex*8.854e-12,Ey*8.854e-12);

figure(2)
pcolor(x,y,ro)
colorbar
axis equal
axis tight
shading flat
```

Porównaj obraz potencjału pola elektrycznego z obrazem dywergencji z indukcji elektrycznej.

Przykład 4

Oblicz gęstość ładunku w obszarze jak w poprzednim przykładzie, gdy pole wytwarzane jest przez ładunki o wartości 1nC każdy, umieszczone w punktach: (-0.1; 0), (0.1; 0), (0; -0.1), (0; 0.1), oraz ładunki o wartości -1nC każdy, umieszczone w punktach:(-0.0707; -0.0707), (-0.0707; 0.0707), (0.0707; -0.0707) oraz (0.0707; 0.0707).

Pytania na następną wejściówkę

Co to jest rotacja?

Jak definiuje się rotację w trójwymiarowych układach współrzędnych – kartezjańskim, walcowym, sferycznym? (*nie musisz pamiętać wzoru, ale ogólną zasadę na jakiej opiera się obliczanie się rotacji*)

Jak definiuje się rotację w dwuwymiarowym układzie kartezjańskim (XY)? Zapisz wzór.

Co to jest natężenie pola magnetycznego? Jakim symbolem oznaczamy tę wielkość, jaką ma jednostkę?

Co to jest gęstość prądu? Jakim symbolem oznaczamy tę wielkość, jaką ma jednostkę?

Mając daną funkcję wektorową $\boldsymbol{H} = [H_x , H_y] = f(x,y)$ oblicz jej rotację.

Jeżeli $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$, to która z wielkości $(\boldsymbol{H},\boldsymbol{J})$ jest wektorem? Która z nich jest skalarem?