Gradient

GRADIENT jest to operator różniczkowy, który polu skalarnemu przyporządkowuje pole wektorowe. Pole to ma kierunek i zwrot największego wzrostu funkcji w danym punkcie, a wartość jest proporcjonalna do szybkości wzrostu funkcji. Można więc powiedzieć, że gradient wskazuje kierunek wzrostu funkcji skalarnej. Gradient definiuje się za pomocą pochodnych cząstkowych, najłatwiej w układzie współrzędnych kartezjańskich, dla funkcji $V(x,y,z)$:

$$grad\,V=\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\mathbf{1}}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{\mathbf{1}}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{\mathbf{1}}_z$$

trochę trudniej w układzie współrzędnych walcowych, dla funkcji $V(r,\varphi,z)$:

$$grad\,V=\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{\mathbf{1}}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{1}}_\varphi+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{\mathbf{1}}_z\ ,$$

a najbardziej złożoną postać przyjmuje w układzie współrzędnych sferycznych, dla funkcji $V(r,\theta,\varphi)$:

$$grad\,V=\nabla V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{\mathbf{1}}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\mathbf{1}}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{1}}_\varphi\ .$$

Ponieważ gradient jest operatorem różniczkującym, a różniczkowanie odbywa się po odległości, to wielkość wynikowa ma zawsze wymiar argumentu podzielony przez jednostkę długości (w układzie SI: metr). Przykładem wykorzystania gradientu w elektrotechnice jest zależność między skalarnym potencjałem elektrycznym V (wyrażanym w woltach [V]), a **wektorem** natężenia pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ (wyrażanym w woltach na metr [V/m]):

$$\boldsymbol{E}=-\,grad\,V$$

Znak „minus” w powyższej zależności oznacza, że natężenie pola elektrycznego pokazuje kierunek malejącego potencjału.

Do liczenia gradientu wykorzystamy prostą funkcję różniczkującą, którą badaliśmy na poprzednich zajęciach (wpisujemy ją w nowym oknie edytora i zapisujemy plik pod nazwą pochodna2.m).

```
function d = pochodna2(x,y)

Lx = length(x);
dx = x(3:Lx)-x(1:Lx-2);
dy = y(3:Lx)-y(1:Lx-2);
d = [NaN dy./dx NaN];
```

Napiszemy teraz nową funkcję, wykorzystującą funkcję różniczkującą `pochodna2` do liczenia natężenia pola (wpisujemy ją w nowym oknie edytora i zapisujemy plik pod nazwą natezeniepola.m):

```
function [Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V)

for k=1:length(y),        %pętla po wszystkich wartościach x
  Ex(k,:) = -pochodna2(x,V(k,:));
end

for k=1:length(x),        %pętla po wszystkich wartościach y
  Ey(:,k) = -pochodna2(y,V(:,k)');
end
```

Przykład 1

Ograniczymy się do obszarów dwuwymiarowych (bez współrzędnej z), w których policzymy natężenie pola elektrycznego na podstawie potencjału. Założymy, że potencjał V zależny od x i y dany jest w macierzy V, w której każdy wiersz zawiera dane dla stałych wartości y, a każda kolumna dane dla stałych wartości x. Utwórzmy macierz V zawierającą przykładowe dane (w Command Window):

```
x = -2.5:0.05:2.5; %zmienna niezależna x: ciąg od -2.5 co 0.05 do 2.5
y = -2:0.05:2;     %zmienna niezależna y: ciąg od -2 co 0.05 do 2
[X,Y] = meshgrid(x,y); %macierze X i Y definiujące obszar obliczeń
V = X.*exp(-X.^2 - Y.^2); %skalarny potencjał elektryczny V
```

Możemy zobaczyć wartości funkcji na wykresie:

```
figure(1);
pcolor(X,Y,V);  % dwuwymiarowy wykres potencjału w postaci kolorów
colorbar        % opis wartości odpowiadających kolorom na wykresie
xlabel('x')     % opis osi x
ylabel('y')     % opis osi y
```

Wywołujemy funkcję natezeniepola (w Command Window) ze zdefiniowanymi wcześniej argumentami:

```
[Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V);
```

Natężenie pola możemy przedstawić za pomocą strzałek na poprzednio zrobionym wykresie:

```
hold on; %podtrzymanie istniejącego wykresu
h = quiver(X,Y,Ex,Ey);
```

Aby strzałki były lepiej widoczne możemy je powiększyć i zmienić ich kolor na biały:

```
set(h,'AutoScaleFactor',2,'color',[1 1 1]);
```

Przykład 2

Utworzymy teraz inną macierz V, reprezentującą potencjał elektryczny dany zależnością:

$$V(x,y) = -(\cos^2 x + \sin^2 y)^2 ,$$

zrobimy dla niej wykres i policzymy natężenie pola (w Command Window):

```
clear           %czyszczenie pamięci zmiennych (Workspace)
close           %zamknięcie rysunku
x = -2.5:0.1:2.5;
y = -2:0.1:2;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
V = -(cos(X).^2+sin(Y).^2).^2;  %potencjał
surf(X,Y,V);                    % wykres potencjału
colorbar
xlabel('x')
ylabel('y')
[Ex,Ey] = natezeniepola(x,y,V); % obliczenie natężenia pola
hold on;
h = quiver(X,Y,Ex,Ey);          % wykres natężenia pola
set(h,'AutoScaleFactor',1,'color',[1 1 1]);
axis tight
```

Strzałki obrazujące natężenie pola powinny pokazywać kierunek malejącego potencjału.

Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadania 3 wyczyść pamięć zmiennych w Matlabie i zamknij rysunki:

```
clear
close all
```

PRZYKŁAD 3

Potencjał V w obszarze $\{x\in\langle -2.5; 2.5\rangle, y\in\langle -2; 2\rangle\}$ dany jest zależnością:

$$V(x,y) = -(x^2 + y^2)$$

Wykonaj wykres potencjału w danym obszarze, a następnie przekształć potencjał do układu współrzędnych biegunowych (r,θ), oblicz składowe natężenia pola elektrycznego w tym układzie i na tym samym rysunku wykonaj wykres natężenia pola. Możesz to zrobić według poniższego planu.

1) Dla zmiennych niezależnych: x zmieniających się od -2.5 do 2.5 co 0.05, oraz y zmieniających się od -2 do 2 co 0.05 utwórz macierze X i Y definiujące obszar obliczeń tak jak w poprzednich zadaniach. Oblicz potencjał pola elektrycznego V i przedstaw go na wykresie. Oblicz odpowiadające temu potencjałowi natężenie pola elektrycznego i przedstaw je na wykresie (*możesz to zrobić dokładnie tak jak w* PRZYKŁADZIE 2).

2) Do przekształcenia macierzy X i Y (utworzonych w punkcie 1) w odpowiednie zmienne w układzie biegunowym wykorzystaj zdefiniowaną w Matlabie funkcję `cart2pol`:

```
[THETA,R] = cart2pol(X,Y);
```

3) Wyprowadź (analitycznie: na kartce, w zeszycie) wzór na potencjał V w układzie współrzędnych biegunowych (w zależności od zmiennych niezależnych θ i r) – *za x i y podstaw odpowiednie funkcje* θ i r*, a następnie zapisz wzór na* $V(r,\theta)$.

4) Oblicz analitycznie minus gradient z $V(r,\theta)$ – wyznacz składowe $E_r(r,\theta)$ i $E_t(r,\theta)$ natężenia pola elektrycznego (*skorzystaj z drugiego wzoru na pierwszej stronie instrukcji i z wzoru wyprowadzonego w punkcie 3*).

5) Oblicz wartości $E_r(r,\theta)$ i $E_t(r,\theta)$ natężenia pola elektrycznego z zależności wyznaczonej w punkcie 4.

```
Er =
Et =
```

w tym miejscu wpisz odpowiednie formuły dla Er i Et

6) Przekształć składowe natężenia pola elektrycznego z układu biegunowego na kartezjański, wg zależności:

```
Ex = Er.*cos(THETA)-Et.*sin(THETA);
Ey = Er.*sin(THETA)+Et.*cos(THETA);
```

7) Wykonaj wykres dla obliczonego powyżej natężenia pola za pomocą zielonych strzałek:

```
h = quiver(X,Y,Ex,Ey,'color',[0 0.5 0]);
```

PRZYKŁAD 4

W pewnym obszarze potencjał elektryczny jest wytwarzany przez trzy ładunki punktowe $q_1 = 1$ nC, $q_2 = 1$ nC oraz $q_3 = 2$ nC. Ładunki położone są w punktach o współrzędnych: P_1: $(0, \sqrt{3})$, P_2: $(-1, 0)$, P_3: $(1, 0)$. Potencjał V pochodzący od każdego z tych ładunków dany jest zależnością:

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_i}$$

gdzie ε = 8.854e-12 F/m, a r_i jest odległością od danego i-tego ładunku do punktu pomiaru potencjału:

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

(x_i, y_i) są to współrzędne punktów P_1, P_2, P_3, a (x_0, y_0) są współrzędnymi punktu pomiaru.

Całkowity potencjał wytwarzany przez wszystkie ładunki jest sumą potencjałów pochodzących od poszczególnych ładunków.

Napisz w Matlabie funkcję obliczającą potencjał oraz natężenie pola elektrycznego w obszarze ograniczonym współrzędnymi: x = -0.9, x = 0.9, y = -0.1, y = 1.5. Przedstaw potencjał i natężenie pola na wykresie.

PYTANIA SPRAWDZAJĄCE DO TEGO ĆWICZENIA

Co to jest skalar (wielkość skalarna), a czym jest wektor (czym się różni od skalara)?

Co to jest gradient?

Jak definiuje się gradient w układzie kartezjańskim?

Mając daną funkcję $V = f(x,y)$ oblicz jej gradient.

Co to jest potencjał elektryczny, jaką ma jednostkę?

Co to jest natężenie pola elektrycznego? Jaką ma jednostkę?

Jeżeli wiadomo, że $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$, to która ze zmiennych $(\boldsymbol{E}, V)$ jest skalarem, a która wektorem?

Jeżeli znamy jednostkę zmiennej V, to jaka będzie jednostka zmiennej $\boldsymbol{E}$?

PYTANIA NA NASTĘPNĄ WEJŚCIÓWKĘ (DYWERGENCJA)

Co to jest dywergencja?

Jak definiuje się dywergencję w układzie kartezjańskim?

Mając daną funkcję wektorową $\boldsymbol{D} = [D_x, D_y] = f(x,y)$ oblicz jej dywergencję.

Co to jest ładunek elektryczny, jaką ma jednostkę?

Co to jest indukcja pola elektrycznego? Jaką ma jednostkę?

Jeżeli znamy jednostkę argumentu dywergencji, to jaka będzie jednostka jej wyniku?