Różniczkowanie numeryczne

Przyjmijmy, że funkcja ciągła $y = f(x) = 3\sin(3x)$, gdzie $x \in \langle 0,2\pi \rangle$, dana jest w postaci dyskretnej jako ciąg wartości y odpowiadających zmiennej niezależnej x, również danej jako ciąg wartości. Chcemy znaleźć wartości pochodnej tej funkcji, które nazwiemy d.

PRZYKŁAD 1

Na początku utworzymy w Matlabie zmienne `x` i `y`, którym przypiszemy wartości x i odpowiadające im wartości funkcji y. Wpisujemy **w oknie poleceń** (Command Window):

```
x = 0:2e-1:2*pi; % zmienna niezależna x: ciąg od 0 co 0.2 do 2*pi
y = 3*sin(3*x);  % wartości funkcji
```

Tworzymy wykres funkcji $y = f(x)$. Wpisujemy polecenia w „Command Window", nie zamykamy rysunku.

```
figure(1);                    % otwieramy nowe okienko dla wykresu
set(gcf,'name','funkcja')     % nadajemy mu nazwę „funkcja"
plot(x,y)                     % rysujemy wykres y(x)
grid on                       % włączamy siatkę
```

Teraz oblicz analitycznie (w zeszycie) pochodną $d\_a = f'(x)$ i przedstaw ją na osobnym wykresie:

```
d_a = [illegible];
figure(2)
set(gcf, 'name', 'pochodna analityczna')
plot(x,d_a)
grid on
```

Najprostszą funkcję liczącą przybliżoną wartość pochodnej napiszemy na podstawie definicji pochodnej (dokładnie, to będzie to tylko iloraz różnicowy: Δy dzielone przez Δx). Zakładając, że x zmienia się jednostajnie, różnice między kolejnymi wartościami x są takie same i mogą być zapamiętane w zmiennej `dx`. Dzieląc różnice w kolejnych wartościach y przez `dx` otrzymamy przybliżoną wartość pochodnej. Wartość ta, tym lepiej będzie odwzorowywać pochodną, im mniejsze będą wartości `dx`.

Funkcję tworzymy w nowym oknie edytora (z menu *File* wybierz *New Script*):

nazwa pliku musi być identyczna jak nazwa funkcji

wynik

nazwa funkcji

argumenty funkcji

Editor - pochodna1.m

```
function pochodna = pochodna1(x,y)
Lx = length(x);            % obliczamy długość wektora x
dx = x(2:Lx)-x(1:Lx-1);   % obliczamy różnice w wartościach x
dy = y(2:Lx)-y(1:Lx-1);   % obliczamy różnice w wartościach y
pochodna = [dy./dx NaN];   % obliczamy iloraz różnicowy
```

Obliczenia.
Wśród nich musi być obliczony wynik, który został zdefiniowany w nagłówku.

Komentarz.
Wszystko wpisane w danej linii po znaku % będzie ignorowane.

Powyższą funkcję zapisujemy w pliku z domyślnie nadawaną nazwą `pochodna1.m` w domyślnie przyjętym miejscu na dysku i zamykamy okno edytora.

Zapisaną funkcję uruchomimy w oknie „Command Window”. W tym celu wpisujemy jej nazwę, a w nawiasie podajemy argumenty (wykorzystamy wcześniej utworzone wektory `x` oraz `y`). Wartości pochodnej zostaną wyprowadzone z funkcji i zapamiętane w zmiennej `d`. Następnie robimy wykres.

nazwa funkcji

argumenty, rozdzielone przecinkiem

wynik

```
d = pochodna1(x,y);
figure(3)
set(gcf, 'name', 'pochodna numeryczna')
plot(x,d)
grid on
```

Porównując wykresy obu pochodnych na rysunkach – `(Figure 2:pochodna analityczna)` i `(Figure 3:pochodna numeryczna)` możemy stwierdzić, czy są one takie same, a zatem czy funkcja `pochodna1` dobrze liczy pochodną. Zauważ, że wykresy są podobne, ale nie identyczne.

Z definicji pochodnej pamiętamy, że jest to granica z ilorazu różnicowego przy $\Delta x \rightarrow 0$. W naszym przykładzie $\Delta x = 0.2$. Jest to wartość względnie duża i na pewno nie można uznać, że jest bliska zeru. Powtórzmy obliczenia funkcji i jej pochodnych (analitycznej i numerycznej) dla mniejszych wartości Δx i sprawdźmy, czy ze zmniejszaniem się Δx wzrasta dokładność liczenia pochodnej. Aby łatwiej było porównać pochodne liczone różnymi sposobami, zrobimy ich wykresy na jednym rysunku.

PRZYKŁAD 2

Zmniejszmy Δx do wartości 0.01 i porównajmy wykresy pochodnych:

```
x = 0:1e-2:2*pi; % ciąg od 0 co 0.01 do 2*pi
y = 3*sin(3*x);  % wartości funkcji
d_a = 9*cos(3*x);
figure(4)
plot(x,d_a)
grid on
d_n = pochodna1(x,y);
hold on
plot(x,d_n,'r');   % 'r' powoduje, że wykres będzie czerwony
legend('pochodna analityczna','pochodna numeryczna')
```

Polecenie “**`hold on`**“ powoduje podtrzymanie bieżącego wykresu – kolejny wykres zostanie **dodany** do już istniejącego. Kolejne wywołanie funkcji **`plot`** bez tego polecenia spowodowałoby usunięcie z bieżącego rysunku istniejącego wykresu.

PRZYKŁAD 3

Sprawdźmy teraz, czy funkcja `pochodna1` będzie prawidłowo liczyć pochodną, jeśli wywołamy ją dla inaczej określonej funkcji $y = f(x)$:

```
clear
close all
x = 0:1e-2:2*pi;
y = -6*cos(x.^2); %   x.^2, a nie: x^2
figure(1);
plot(x,y,'k')
d = pochodna1(x,y);
```

Do stwierdzenia poprawności działania funkcji musimy znać pochodną. Wyznacz pochodną $d\_a = f'(x)$ z funkcji $f(x) = -6\cos(x^2)$ i zrób jej wykres na tym samym rysunku (`figure(1)`) podobnie jak w poprzednim przykładzie. Wykresy pochodnej liczonej analitycznie i numerycznie wykonaj różnymi kolorami ('r' – czerwony, 'b' – niebieski). Włącz siatkę i dodaj legendę (uwaga: opisy wykresów muszą być podane w takiej samej kolejności, w jakiej były wykonywane wykresy).

Druga funkcja różniczkująca

Teraz napiszemy drugą funkcję różniczkującą. Tym razem ilorazy różnicowe będziemy liczyć biorąc dla każdego punktu wartość następną i poprzednią. Uzyskaną różnicę podzielimy przez dwukrotną różnicę wartości x. Tworzymy funkcję (**w nowym oknie edytora**):

Editor - pochodna2.m

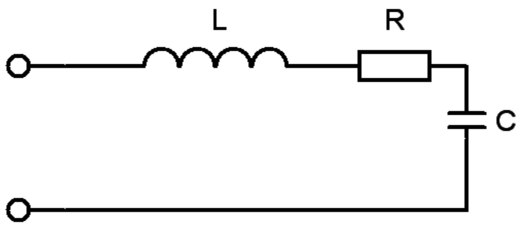
```
function d = pochodna2(x,y)

Lx = length(x);
dx = [illegible]
dy = [illegible]
d = [NaN dy./dx NaN];
```

zapisujemy ją na dysku w domyślnej lokalizacji i wywołujemy w oknie Command Window podając jako argumenty x i odpowiadające im wartości funkcji y zdefiniowane w ostatnim przykładzie:

```
d = pochodna2(x,y);
plot(x,d,'g');
```

Przykład 4



W obwodzie przedstawionym na rysunku wartości elementów są następujące: R = 400 Ω, L = 318,31 mH, C = 31,831 μF. Obwód został podłączony do źródła napięcia. Napięcie na kondensatorze jest funkcją czasu i wynosi: $u_C(t) = 1 - [\mathrm{ch}(bt) + (2/\sqrt{3})\cdot\mathrm{sh}(bt)]\cdot e^{-at}$.

1) Wykonaj wykres przedstawiający napięcia na wszystkich elementach i źródle w czasie od 0 do 50 ms, z krokiem 10 μs. Przebiegi napięć przedstaw różnymi kolorami, włącz siatkę i dodaj legendę. Zanim zaczniesz obliczenia wyczyść pamięć zmiennych i zamknij wszystkie rysunki.

```
a=200*pi;
b=100*pi*sqrt(3);
u_C = 1-(cosh(b*t)+2/sqrt(3)*sinh(b*t)).*exp(-a*t);
```

2) Przedstaw na wykresie jak zmienia się energia w polu elektrycznym kondensatora oraz jak zmienia się energia w polu magnetycznym cewki.

3) Ładunek elektryczny zgromadzony na okładkach kondensatora można policzyć jako pochodną z energii względem napięcia. Strumień indukcji magnetycznej w cewce można policzyć jako pochodną energii w cewce względem prądu. Oblicz odpowiednie pochodne i przedstaw na wykresach zmiany ładunku i strumienia w czasie.

4) Prąd elektryczny to zmiana ładunku elektrycznego w czasie. Oblicz pochodną z ładunku na kondensatorze względem czasu i przedstaw wynik na wykresie.

5) Oblicz pochodną ze strumienia magnetycznego względem prądu i przedstaw wynik na wykresie względem czasu. Jak zinterpretujesz uzyskany wynik?

POCHODNA CZĄSTKOWA

Wykorzystajmy funkcję `pochodna2` do liczenia pochodnych cząstkowych. W tym celu zdefiniujemy funkcję $z = f(x,y)$ w następujący sposób:

```
clear
close all
x = -2.5:0.1:2.5;
y = -2:0.1:2;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = X.*exp(-X.^2 - Y.^2);
```

Zobaczmy, jak wygląda wykres funkcji $z = f(x,y)$ na płaszczyźnie XY:

```
figure(1);
surf(X,Y,Z)
axis tight
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Pochodne cząstkowe należy policzyć niezależnie od siebie dla zmieniających się wartości x oraz y. Zastanów się, jak powinny wyglądać wykresy pochodnych liczonych wzdłuż osi X, a jak pochodnych liczonych wzdłuż osi Y. W których miejscach pochodne powinny przyjmować wartości dodatnie, ujemne i zerowe? Wyznacz analitycznie pochodne cząstkowe, a następnie zrób ich wykresy na podstawie otrzymanych pochodnych albo korzystając z różniczkowania numerycznego.

Różniczkowanie po x:

```
for w=1:length(y)
  Dx(w,:) = pochodna2(x,Z(w,:));
end
figure(11)
surf(X,Y,Dx)
axis tight
xlabel('x')
ylabel('y')
```

Różniczkowanie po y:

```
for k=1:length(x)
  Dy(:,k) = pochodna2(y,Z(:,k)');
end
figure(12)
surf(X,Y,Dy)
axis tight
xlabel('x')
ylabel('y')
```

PYTANIA NA NASTĘPNĄ WEJŚCIÓWKĘ

Co to jest skalar (wielkość skalarna), a czym jest wektor (czym się różni od skalara)?

Co to jest gradient? Jak definiuje się gradient w układzie kartezjańskim?

Mając daną funkcję $V = f(x,y)$ oblicz jej gradient.

Co to jest potencjał elektryczny, jaką ma jednostkę?

Co to jest natężenie pola elektrycznego? Jaką ma jednostkę?

Jeżeli wiadomo, że $E = -\operatorname{grad} V$, to która ze zmiennych (E, V) jest skalarem, a która wektorem?