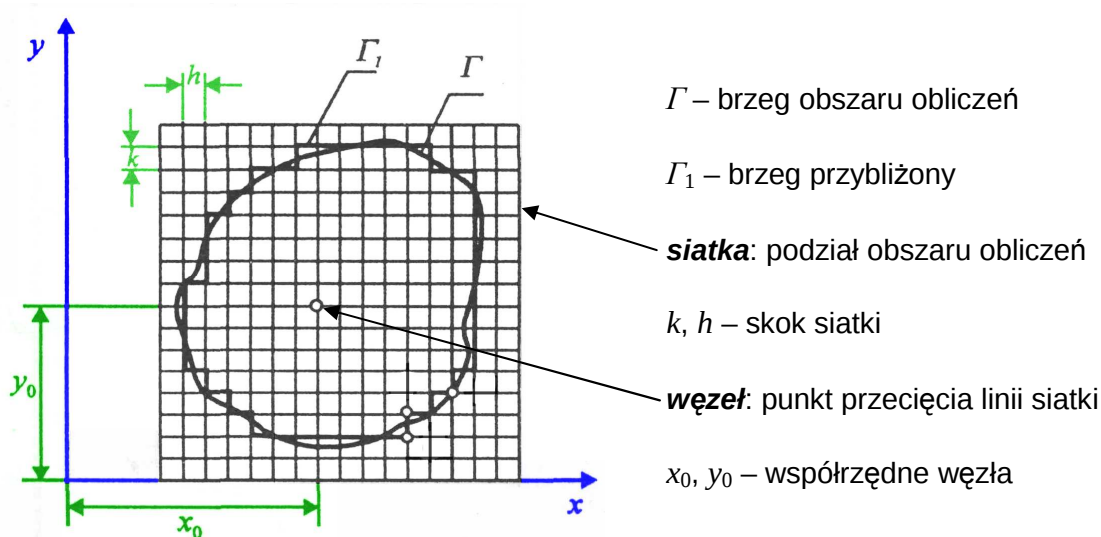


Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych jest jedną z najstarszych metod numerycznych wykorzystywanych do rozwiązywania zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi. Polega ona na przechodzeniu w równaniu różniczkowym od pochodnych do odpowiednich ilorazów różnicowych - czyli przejściu od równań różniczkowych do równań różnicowych, które wiążą ze sobą wartości szukanej funkcji w wybranych punktach. W przeciwieństwie do metod analitycznych, rozwiązanie otrzymuje się nie w całym rozpatrywanym obszarze, ale tylko w pewnych jego punktach, zwanych węzłami. Sposób wyboru tych punktów zależy między innymi od układu współrzędnych przyjętego do rozwiązania zagadnienia. Zbiór wszystkich węzłów określonych dla danego obszaru nazywamy siatką, która w metodzie różnic skończonych jest regularna. W przedstawionym poniżej przykładzie siatka jest kwadratowa i dla takiej siatki wyprowadzone tu zależności są prawdziwe.

Rozważamy obszar na płaszczyźnie xOy , w którym potencjał skalarny V spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (1)$$



Rys. 1 Podział obszaru obliczeń

W kartezjańskim układzie współrzędnych laplasjan wyrażamy następująco:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad (2)$$

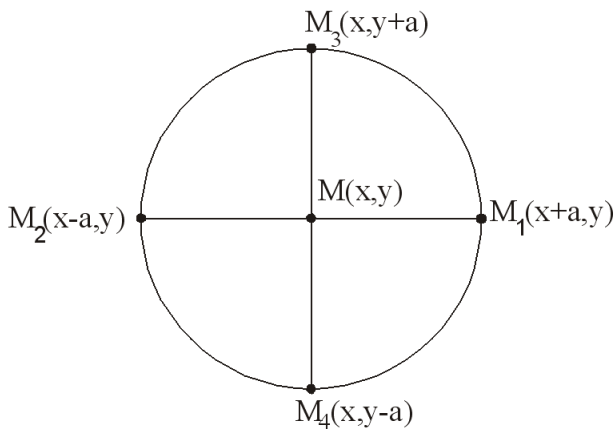
zatem równanie Laplace'a zapiszemy:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Do znalezienia rozwiązania tego równania konieczna jest jeszcze znajomość warunków brzegowych, czyli wartości potencjału (lub jego pochodnej) na brzegu Γ .

ZADANIE

Znaleźć rozkład skalarowego potencjału elektrycznego $V(x,y)$ w obszarze ograniczonym brzegiem Γ , w którym jest spełnione równanie Laplace'a i są dane warunki brzegowe (czyli na brzegu Γ jest znana wartość potencjału, lub jego pochodna).



Rys. 2 Węzeł M i węzły sąsiednie

Aby rozwiązać to zadanie metodą różnic skończonych nakładamy na obszar obliczeń siatkę, stanowiącą podział tego obszaru na mniejsze podobszary. Rozwiązania zadania będziemy poszukiwać w wybranych punktach obszaru – węzłach, wyznaczanych przez siatkę. Rozpatrzmy potencjał w węźle M , o współrzędnych x,y oraz w węzłach bezpośrednio z nim sąsiadujących (M_1, M_2, M_3 i M_4). W równaniu (3) występują drugie pochodne potencjału. Wyznamy je w punkcie M , zakładając, że znamy potencjał w tym punkcie.

Niech potencjał w punkcie $M(x,y)$ wynosi $V(x,y)$. Potencjały w punktach sąsiednich M_1, M_2, M_3, M_4 (rys.2) otrzymamy rozwijając $V(x+a, y)$ w szereg Taylora:

$$V(x+a, y) = V(x, y) + a \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dots \quad (4)$$

W ten sam sposób, rozwijając $V(x-a, y)$:

$$V(x-a, y) = V(x, y) - a \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dots \quad (5)$$

Jeżeli ograniczymy się do trzech pierwszych wyrazów rozwinięcia i dodamy powyższe równania stronami to możemy napisać następującą zależność na drugą pochodną po x :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{V(x+a, y) + V(x-a, y) - 2V(x, y)}{a^2} \quad (6)$$

Podobnie możemy otrzymać wyrażenie na drugą pochodną po y :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{V(x, y+a) + V(x, y-a) - 2V(x, y)}{a^2} \quad (7)$$

Możemy już teraz zapisać przybliżone wyrażenie na Laplasjan potencjału skalarowego $V(x,y)$:

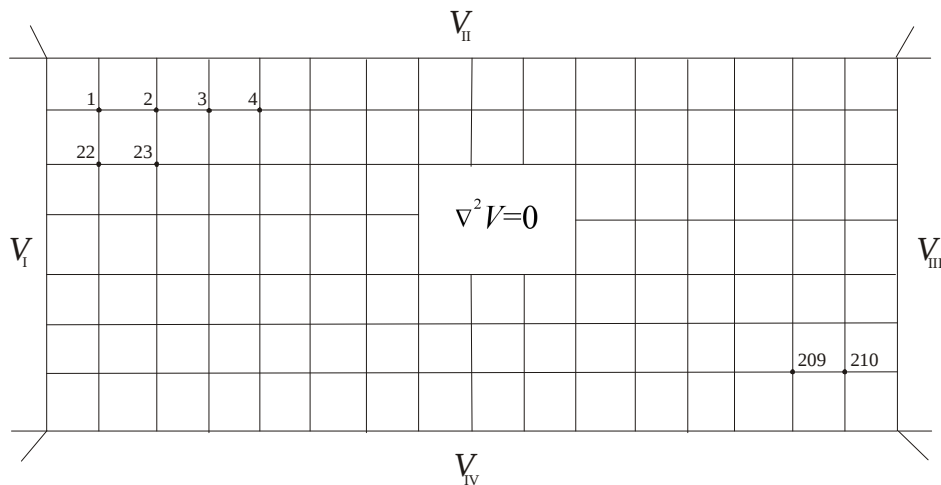
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{1}{a^2} [V(x+a, y) + V(x-a, y) + V(x, y+a) + V(x, y-a) - 4V(x, y)] \quad (8)$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (3) i znajdujemy potencjał w punkcie $M(x,y)$, wyrażony za pomocą wartości potencjałów w punktach sąsiednich. Odpowiednikiem równania różniczkowego cząstkowego Laplace'a $\nabla^2 V = 0$ jest więc następujące równanie różnicowe:

$$V \cong \frac{1}{4} [V(x+a, y) + V(x-a, y) + V(x, y+a) + V(x, y-a)] \quad (9)$$

PRZYKŁAD 1

Wewnątrz obszaru ograniczonego czterema ścianami o danych potencjałach V_I , V_{II} , V_{III} , V_{IV} skalarny potencjał elektryczny V spełnia równanie Laplace'a.



Rys. 3 Prostokątny obszar obliczeń, ze znanymi wartościami potencjału na brzegach

Przy przybliżonym wyznaczaniu rozkładu potencjału, dla każdego z 210 punktów, powstałych przy podziale rozważanego obszaru kwadratową siatką, możemy zapisać równania:

$$V_1 = \frac{1}{4}(V_2 + V_I + V_{II} + V_{22}) \quad (10)$$

$$V_2 = \frac{1}{4}(V_3 + V_I + V_{II} + V_{23}) \quad (11)$$

.....

$$V_{210} = \frac{1}{4}(V_{III} + V_{209} + V_{189} + V_{IV}) \quad (12)$$

Równanie różniczkowe cząstkowe Laplace'a zostało zastąpione układem 210 równań algebraicznych, liniowych, z 210 niewiadomymi potencjałami. Równania te możemy uporządkować i zapisać w postaci macierzowej, a następnie rozwiązywać korzystając z dowolnej metody rozwiązywania układów równań. Jako wyniki uzyskamy wartości potencjałów we wszystkich węzłach analizowanego obszaru.

PYTANIA NA WEJŚCIÓWKĘ: METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych należy do numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Stosuje się w niej przekształcenie zadanego równania.

1. Co uzyskuje się w wyniku tego przekształcenia (co jest faktycznie rozwiązywane: równanie różniczkowe, równanie algebraiczne, układ równań, pochodna, całka)?
2. Co (oprócz równania różniczkowego) jest potrzebne do rozwiązania zadania?
3. Co jest wynikiem obliczeń tą metodą? Czy rozwiązanie uzyskuje się w postaci jednej funkcji, w postaci kilku funkcji, w postaci liczby, czy w postaci zbioru liczb?
4. Wyjaśnij pojęcia „siatka”, „węzły”, oraz „warunki brzegowe”.
5. Co to są „warunki brzegowe”?
6. Co to są „warunki brzegowe Dirichleta” i „warunki brzegowe Neumanna”?
7. Zapisz równanie (9) dla potencjału w wybranym węźle, w rozpatrywanym powyżej przykładzie.
8. Oblicz wartość potencjału w węźle 2, zakładając, że wartości potencjałów w węzłach sąsiadujących z nim są znane.

ZADANIE 1

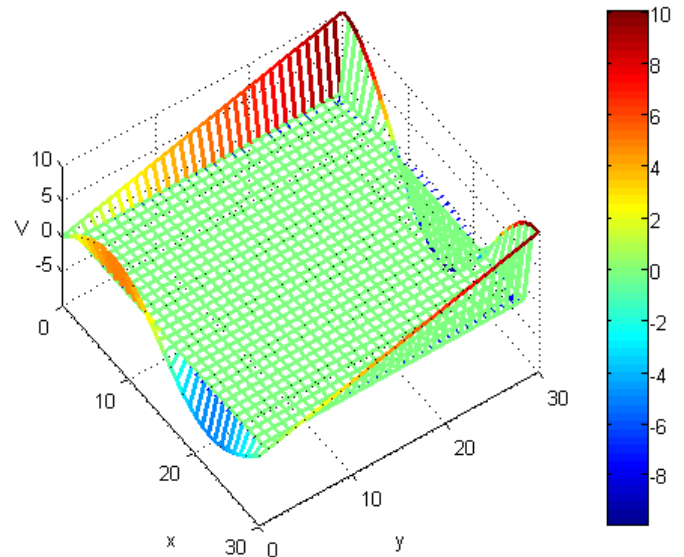
Dany jest potencjał na brzegach dwuwymiarowego obszaru 30×30 , zmieniający się wzdłuż całego brzegu w następujący sposób (Rys. 4):

- I - liniowo od 0 (dla $y = 0$) do 10 V (dla $y = 30$)
- II - $10\cos(x \cdot \pi/15)$
- III - liniowo od 0 (dla $y = 0$) do 10 V (dla $y = 30$)
- IV - $5\sin(x \cdot \pi/15)$

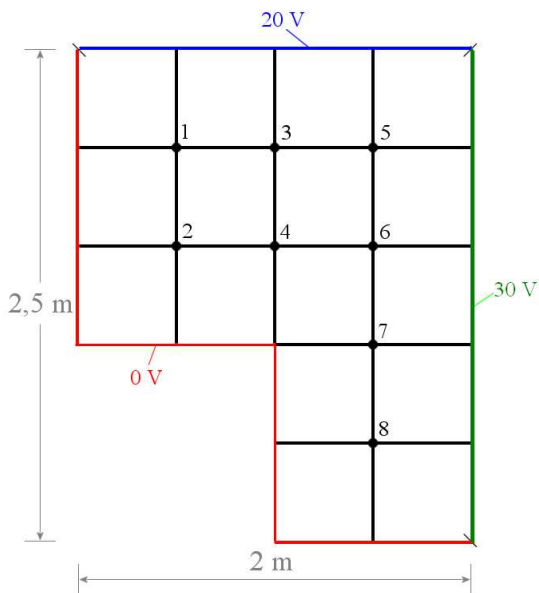
Należy znaleźć rozkład potencjału wewnątrz tego obszaru.

Rozwiązanie dla 9 węzłów wewnątrz obszaru:

0	5	0	-5	0
2.5	2.857	1.071	0.179	2.5
5	2.857	1.25	2.143	5
7.5	2.321	-1.071	2.143	7.5
10	0	-10	0	10



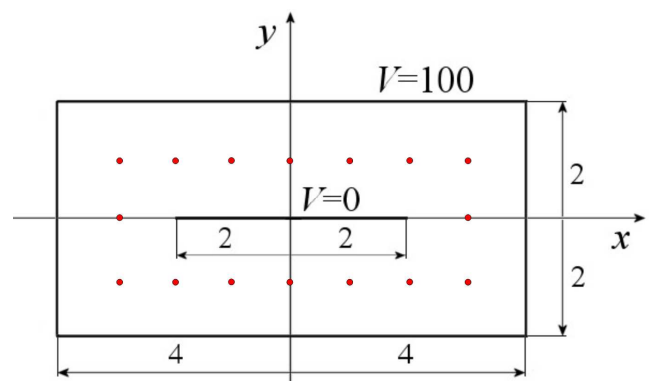
Rys. 4 Warunki brzegowe w zadaniu 1



Rys. 5 Warunki brzegowe w zadaniu 2

ZADANIE 2

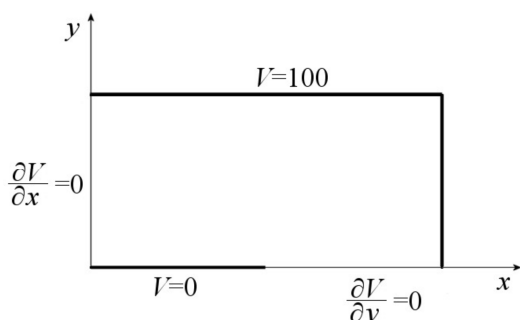
Dany jest potencjał V na brzegach obszaru (jak na Rys. 5). Potencjał na górnej krawędzi obszaru wynosi $V = 20$ V, potencjał na prawej krawędzi wynosi $V = 30$ V, na pozostałych brzegach potencjał jest zerowy. Należy znaleźć rozkład potencjału wewnątrz tego obszaru.



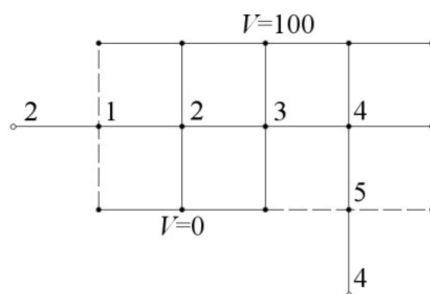
Rys. 6 Obszar obliczeń w zadaniu 3

ZADANIE 3

Dany jest potencjał $V = 100$ V na brzegach obszaru (jak na Rys. 6) oraz $V = 0$ w środku. Należy znaleźć rozkład potencjału wewnątrz tego obszaru. Uwaga: obszar obliczeń oraz rozmiar macierzy można znacznie zmniejszyć uwzględniając symetrię (zob. Rys. 7 i Rys. 8).



Rys. 7 Warunki symetrii w zadaniu 3



Rys. 8 Symetryczne węzły w zadaniu 3