Różniczkowanie numeryczne

Przyjmijmy, że funkcja ciągła $y = f(x) = 4\sin(3x)e^{-x/2}$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, dana jest w postaci dyskretnej jako ciąg wartości y odpowiadających zmiennej niezależnej x, również danej jako ciąg wartości. Chcemy znaleźć wartości pochodnej tej funkcji, które nazwiemy dn.

PRZYKŁAD 1

Na początku utworzymy w Matlabie zmienne `x` i `y`, którym przypiszemy wartości x i odpowiadające im wartości funkcji y. Wpisujemy **w oknie poleceń** (Command Window):

```
x = 0:1e-2:2*pi;            % zmienna niezależna x: ciąg od 0 do 2*pi
y = 4*sin(3*x).*exp(-x/2);  % wartości funkcji
```

Tworzymy wykres funkcji $y = f(x)$. Wpisujemy polecenia w „Command Window”, nie zamykamy rysunku.

```
plot(x,y)             % rysujemy wykres y(x)
grid on, hold on      % włączamy siatkę i podtrzymujemy wykres
```

Teraz obliczamy analitycznie pochodną $da = f'(x)$ i przedstawiamy ją na wykresie:

```
da = [redacted]
plot(x,da,'r')
```

Funkcję liczącą przybliżoną wartość pochodnej napiszemy na podstawie definicji (dokładnie, to będzie to tylko iloraz różnicowy). Różnice między kolejnymi wartościami x zapamiętamy w zmiennej `dx`, różnice między wartościami y zapamiętamy w zmiennej `dy`. Dzieląc `dy` przez `dx` otrzymamy przybliżoną wartość pochodnej. Wartość ta, tym lepiej będzie odwzorowywać pochodną, im mniejsze będą wartości `dx`.
Funkcję tworzymy w nowym oknie edytora (z menu *File* wybierz *New Script*):

nazwa pliku musi być identyczna jak nazwa funkcji

wynik

nazwa funkcji

argumenty funkcji

Komentarz.
Wszystko wpisane w danej linii po znaku % będzie ignorowane.

Editor - pochodna.m

```
function wynik = pochodna(x,y)
Lx =                    % obliczamy długość wektora x
dx =                    % obliczamy różnice w wartościach x
dy =                    % obliczamy różnice w wartościach y
wynik =                 % obliczamy iloraz różnicowy
```

Obliczenia.
Wśród nich musi być obliczony wynik, który został zdefiniowany w nagłówku.

Powyższą funkcję zapisujemy w pliku z domyślnie nadawaną nazwą `pochodna.m` w domyślnie przyjętym miejscu na dysku i zamykamy okno edytora.

Zapisaną funkcję uruchomimy w oknie „Command Window”. W tym celu wpisujemy jej nazwę, a w nawiasie podajemy argumenty (wykorzystamy wcześniej utworzone wektory `x` oraz `y`). Wartości pochodnej zostaną wyprowadzone z funkcji i zapamiętane w zmiennej `dn`. Następnie robimy wykres.

nazwa funkcji

argumenty, rozdzielone przecinkiem

wynik

```
dn = pochodna(x,y);
plot(x,dn,'g')
```

Porównując wykresy obu pochodnych na rysunku możemy stwierdzić, czy są one takie same, a zatem czy funkcja `pochodna` dobrze liczy pochodną. Ponieważ wykresy prawie się pokrywają, o tym jak dobrze działa funkcja mogą świadczyć różnice między uzyskanymi z niej wynikami a wartościami prawdziwymi (pochodną liczoną analitycznie). Dobrą miarą jakości funkcji może być błąd średniokwadratowy.

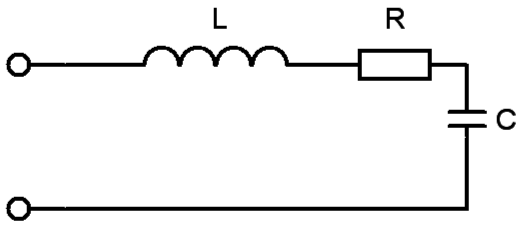
Oblicz i przedstaw na wykresie:

1) różnicę `d1` między wartościami pochodnej obliczonej numerycznie i analitycznie,
2) różnicę `d2` wyrażoną w procentach wartości pochodnej analitycznej (`d1` odniesione do `d2`).

Oblicz dla przykładu 1:

1) błąd średniokwadratowy (MSE),
2) pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE),
3) pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) odniesiony do wartości skutecznej funkcji (`da`).

PRZYKŁAD 2



W obwodzie przedstawionym na rysunku wartości elementów są następujące: R = 400 Ω, L = 318,31 mH, C = 31,831 μF. Obwód został podłączony do źródła napięcia. Napięcie na kondensatorze jest funkcją czasu i wynosi: $u_C(t) = 1 - [\mathrm{ch}(bt) + (2/\sqrt{3})\cdot\mathrm{sh}(bt)]\cdot e^{-at}$.

1) Wykonaj wykres przedstawiający napięcia na wszystkich elementach i źródle w czasie od 0 do 50 ms, z krokiem 10 μs. Przebiegi napięć przedstaw różnymi kolorami, włącz siatkę i dodaj legendę. Zanim zaczniesz obliczenia wyczyść pamięć zmiennych i zamknij wszystkie rysunki.

```
a=200*pi;
b=100*pi*sqrt(3);
u_C = 1-(cosh(b*t)+2/sqrt(3)*sinh(b*t)).*exp(-a*t);
```

2) Przedstaw na wykresie jak zmienia się energia w polu elektrycznym kondensatora oraz jak zmienia się energia w polu magnetycznym cewki.

3) Ładunek elektryczny zgromadzony na okładkach kondensatora można policzyć jako pochodną z energii względem napięcia. Strumień indukcji magnetycznej w cewce można policzyć jako pochodną energii w cewce względem prądu. Oblicz odpowiednie pochodne i przedstaw na wykresach zmiany ładunku i strumienia w czasie.

4) Prąd elektryczny to zmiana ładunku elektrycznego w czasie. Oblicz pochodną z ładunku na kondensatorze względem czasu i przedstaw wynik na wykresie.

5) Oblicz pochodną ze strumienia magnetycznego względem prądu i przedstaw wynik na wykresie względem czasu. Jak zinterpretujesz uzyskany wynik?

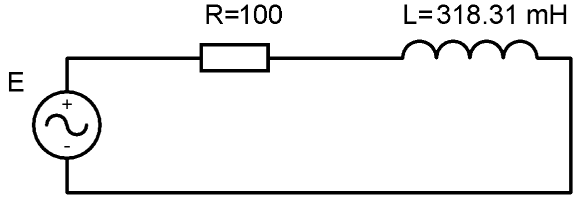
PRZYKŁAD 3

Obwód przedstawiony na poniższym rysunku jest zasilany ze źródła napięcia przemiennego. Określ wartość skuteczną napięcia źródła E na podstawie znajomości wartości R i L oraz prądu i(t) w stanie ustalonym. Wykreśl przebiegi spadków napięć na elementach R i L oraz napięcia zasilającego E.

Czas i prąd w obwodzie są zdefiniowane następująco:

```
t = 0:1e-4:40e-3;
i = 0.12*sin(100*pi*t-pi/4);
```

Parametry obwodu: R = 100 Ω; L = 318,31 mH.



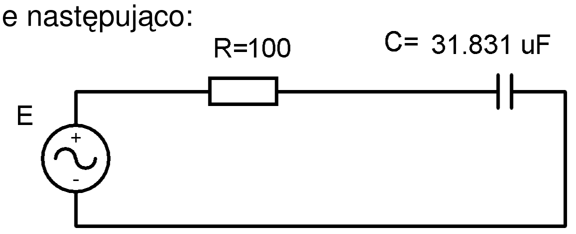
PRZYKŁAD 4

Szeregowy obwód RC jest zasilany ze źródła napięcia przemiennego. Określ wartość skuteczną napięcia zasilającego źródła na podstawie znajomości wartości R i C oraz spadku napięcia uc(t) na kondensatorze w stanie ustalonym. Wykreśl przebiegi spadków napięć na elementach R i C oraz napięcia zasilającego E.

Czas i spadek napięcia na kondensatorze są zdefiniowane następująco:

```
t = 0:1e-4:40e-3;
uc= 10*sin(100*pi*t);
```

Parametry obwodu: R = 100 Ω;   C = 31,831 μF.



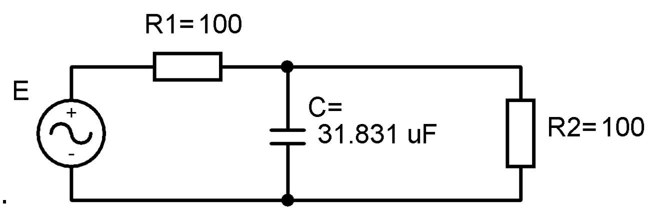
PRZYKŁAD 5

Obwód przedstawiony na poniższym rysunku jest zasilany ze źródła napięcia przemiennego. Określ wartość skuteczną napięcia zasilającego źródła na podstawie znajomości wartości R1, R2 i C oraz spadku napięcia uc(t) na kondensatorze w stanie ustalonym. Wykreśl przebiegi spadków napięć i prądów na elementach oraz napięcia zasilającego E.

Spadek napięcia na kondensatorze jest zdefiniowany następująco:

```
uc= 12*sin(100*pi*t);
```

Parametry obwodu: R1 = R2 = 100 Ω;   C = 31,831 μF.



PRZYKŁAD 6

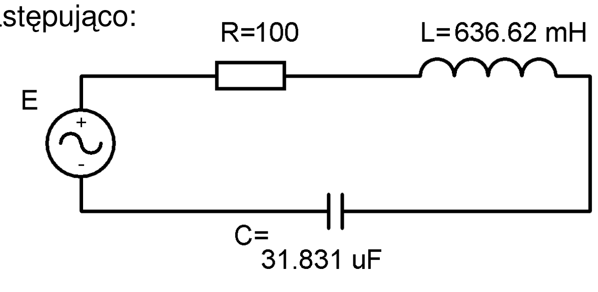
Szeregowy obwód RLC jest zasilany ze źródła napięcia przemiennego. Określ wartość skuteczną napięcia zasilającego źródła na podstawie znajomości wartości R, L, C oraz spadku napięcia uc(t) na kondensatorze w stanie ustalonym. Wykreśl przebiegi spadków napięć na elementach R, L, C oraz napięcia zasilającego E.

Spadek napięcia na kondensatorze jest zdefiniowany następująco:

```
uc= 10*sin(100*pi*t);
```

Parametry obwodu:

R = 100 Ω;   L = 636.62 mH,   C = 31,831 μF.



Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne, pierwszego rzędu $F(y', y, x)$, z warunkiem początkowym $y(0)$. Rozwiązujemy równanie w sposób numeryczny, metodą Eulera. Rozwiązaniem będą wartości y dane dla wszystkich wartości x. Skorzystamy z definicji pochodnej.

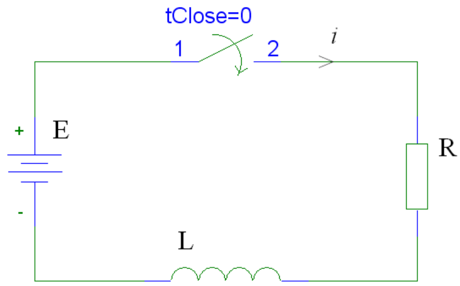
Mając daną funkcję $y(x)$, dla Δx dążących do zera możemy zapisać:

(**1**) $y' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}$, skąd wyznaczamy wartość y_n:

(**2**) $y_n = y_{n-1} + y'\Delta x$.

Z danego równania różniczkowego wyznaczamy y' i podstawiamy do równania (**2**). Otrzymujemy w ten sposób wzór umożliwiający obliczenie wartości y_n w punkcie x_n, na podstawie wartości y_{n-1}, czyli w punkcie wcześniejszym: x_{n-1}.

Jako przykład rozwiązywania równania różniczkowego rozpatrzymy załączenie obwodu z indukcyjnością do źródła napięcia stałego. Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa możemy zapisać równanie różniczkowe (suma napięć w obwodzie jest równa zero), a ze stanu obwodu przed przełączeniem warunek początkowy $i(0)$:



(**3**) $\mathrm{R}i + \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{E}$, $\qquad i(0) = 0$.

Analityczne rozwiązanie zadania prowadzi do uzyskania funkcji $i(t) = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, gdzie $\tau = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$ jest stałą czasową obwodu.

Zobaczmy jak wygląda przebieg funkcji $i(t)$ w czasie, dla przykładowych wartości parametrów występujących w zadaniu ($\mathrm{R} = 100\ \Omega$, $\mathrm{L} = 318.31\ \mathrm{mH}$, $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{V}$):

```
R = 100;
L = 318.31e-3;
E = 200;
tau = L/R;           % stała czasowa obwodu, w tym przypadku ok. 3.18 ms
t = linspace(0,0.03,1001);%przyjmujemy 1001 wartości czasu od 0 do 30 ms
i = E/R*(1-exp(-t/tau));  % rozwiązanie analityczne
figure(1);
set(gcf,'name','rozwiązanie analityczne')
plot(t,i)
grid on
axis([-0.001  0.03  -0.1  2.1])
```

Analogicznie jak dla funkcji $y(x)$, dla funkcji $i(t)$ równanie (**2**) zapiszemy w postaci:

(**4**) $i_n = i_{n-1} + \dfrac{di}{dt}\Delta t$

Z równania różniczkowego (**3**) wyznaczamy pochodną w n-tym kroku, również na podstawie wartości funkcji w kroku n–1:

(**5**) $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}} - \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}i$

Zatem dla naszego zadania wartość szukanej funkcji w n-tym kroku wyrazimy zależnością:

(6) $$i_n = i_{n-1} + \left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} i_{n-1} \right) \Delta t$$

Tworzymy funkcję (w nowym oknie edytora):

rr1.m

```
function i = rr1(i0,t,R,L,E)

r = length(t);
dt = t(2)-t(1);
i(1:r)=NaN;
i(1) = i0;        % pierwszą wartością jest zadany warunek i(0)
for n = 2:r
  i(n) = i(n-1)*(1-R*dt/L) + E/L*dt;   % równanie (6)
end
figure(2);
set(gcf,'name','rozwiązanie numeryczne')
plot(t,i,'r')
grid on
```

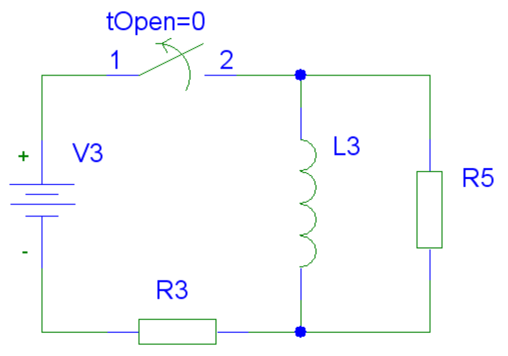
i wywołujemy ją podając zerowy warunek początkowy jako pierwszy argument:

```
i = rr1(0,t,R,L,E);
```

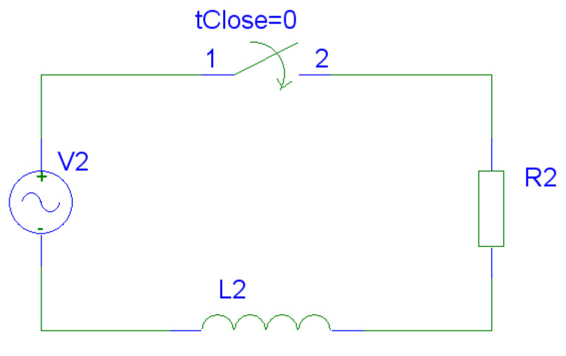
Dla innego zadania musimy odpowiednio zmienić funkcję, tzn. wyznaczyć pochodną z równania różniczkowego (zapisanego dla danego zadania) i podstawiając ją do równania (**4**) wyznaczyć wartość funkcji w n-tym kroku, na podstawie wartości funkcji w kroku n–1.

Rozwiąż zadania (poszukujemy prądu na indukcyjności)

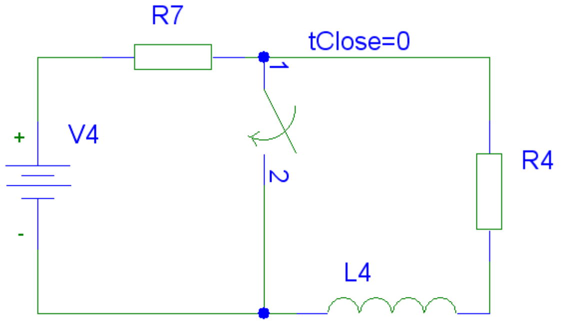
zadanie 1) R3 = 10 Ω; R5 = 20 Ω; L3 = 318.47 mH; V3 = 12 V

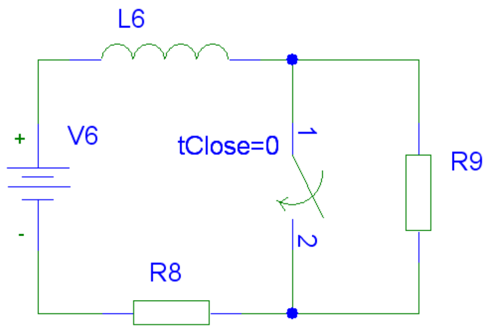


zadanie 2) R2 = 10 Ω; L2 = 318.47 mH; V2 = 200sin(ωt) V; f = 50 Hz



zadanie 3) $R4 = 10\ \Omega$; $R7 = 20\ \Omega$; $L4 = 200$ mH; $V4 = 9$ V

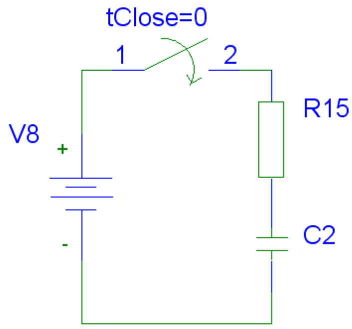




zadanie 4) $R8 = 30\ \Omega$; $R9 = 50\ \Omega$; $L6 = 100$ mH; $V6 = 24$ V

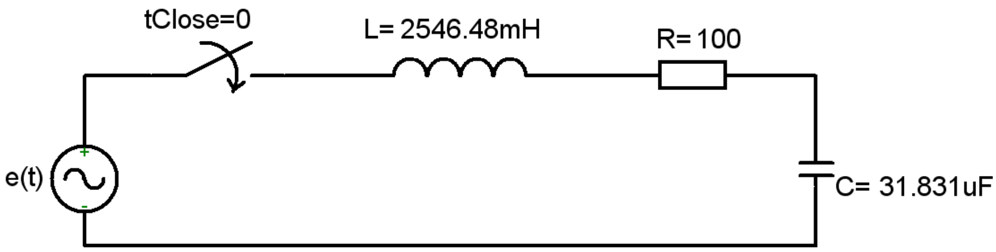
zadanie 5) Poszukujemy wartości napięcia na kondensatorze.

$R15 = 100\ \Omega$; $C2 = 200$nF, $V8 = 6$V



zadanie 6) Poszukujemy wartości prądu w obwodzie i napięcia na kondensatorze.

$R = 100\ \Omega$, $L = 2546{,}48$ mH, $C = 31{,}831\ \mu$F, $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t)$ V; $f = 50$ Hz



PYTANIA NA NASTĘPNĄ WEJŚCIÓWKĘ: METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych należy do numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Stosuje się w niej przekształcenie zadanego równania.

1. Co uzyskuje się w wyniku tego przekształcenia (co jest faktycznie rozwiązywane: równanie różniczkowe, równanie algebraiczne, układ równań)?
2. Co (oprócz równania różniczkowego) jest potrzebne do rozwiązania zadania?
3. Co jest wynikiem obliczeń tą metodą? Czy rozwiązanie uzyskuje się w postaci jednej funkcji, w postaci kilku funkcji, w postaci liczby, czy w postaci zbioru liczb?
4. Wyjaśnij pojęcia „siatka”, „węzły”, oraz „warunki brzegowe”.
5. Co to są „warunki brzegowe Dirichleta” i „warunki brzegowe Neumanna”?