Interpolacja

Funkcja $y = f(x)$ jest dana w postaci dyskretnej:

(1) $y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2),\quad y_3 = f(x_3),\quad \dots\quad y_n = f(x_n),\ y_{n+1} = f(x_{n+1}),$

to znaczy, że w pewnym przedziale $\langle x_1;\ x_2\rangle$ zmiennej niezależnej x są znane wartości tej funkcji, przy czym są one znane tylko w wybranych punktach. Wykonując interpolację uzyskuje się przybliżone wartości funkcji $f(x)$ również dla innych punktów należących do przedziału $\langle x_1;\ x_2\rangle$, ale niebędących punktami ze zbioru danych. Punkty $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ ,\ x_n,\ x_{n+1}$ (ogólnie: x_i) nazywa się węzłami interpolacji.

Interpolacja wykorzystująca wielomian Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona można zapisać w postaci:

(2) $F(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + \dots + b_{n+1} x^n,$

gdzie $b_1,\ b_2,\ \dots\ b_{n+1}$ są niewiadomymi współczynnikami funkcji interpolacyjnej $F(x)$. Mając do dyspozycji $n+1$ danych można zapisać wielomian n–tego rzędu. Równanie (2) zapisuje się w postaci:

(3) $F(x) = a_1 + a_2(x-x_1) + a_3(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)\ ,$

po czym tworzy się układ równań podstawiając do powyższego wzoru dane wartości x_i oraz y_i:

$$
\begin{aligned}
y_1 = F(x_1) &= a_1 + a_2(x_1-x_1) + a_3(x_1-x_1)(x_1-x_2) + \dots + a_{n+1}(x_1-x_1)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)\\
y_2 = F(x_2) &= a_1 + a_2(x_2-x_1) + a_3(x_2-x_1)(x_2-x_2) + \dots + a_{n+1}(x_2-x_1)(x_2-x_2)\dots(x_2-x_n)\\
&\dots\\
y_{n+1} = F(x_{n+1}) &= a_1 + a_2(x_{n+1}-x_1) + a_3(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) + \dots + a_{n+1}(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)
\end{aligned}
$$

Ostatecznie układ równań jest następujący:

(4)
$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_1\\
y_2 &= a_1 + a_2(x_2-x_1)\\
y_3 &= a_1 + a_2(x_3-x_1) + a_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\
y_4 &= a_1 + a_2(x_4-x_1) + a_3(x_4-x_1)(x_4-x_2) + a_4(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\\
&\dots\\
y_n &= a_1 + a_2(x_n-x_1) + a_3(x_n-x_1)(x_n-x_2) + \dots + a_n(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})\\
y_{n+1} &= a_1 + a_2(x_{n+1}-x_1) + a_3(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) + \dots + a_{n+1}(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)
\end{aligned}
$$

co można zapisać macierzowo:

(5) $\mathbf{\Delta X}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{y},$ gdzie:

(6)
$$
\mathbf{\Delta X} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0\\
1 & x_2-x_1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0\\
1 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)(x_3-x_2) & 0\cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
1 & x_n-x_1 & (x_n-x_1)(x_n-x_2) & \cdots & (x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}) & 0\\
1 & x_{n+1}-x_1 & (x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) & \cdots & (x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_{n-1}) & (x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)
\end{bmatrix},
$$

a $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{y}$ są wektorami kolumnowymi.

Równanie (5) należy rozwiązać znajdując wartości współczynników zawarte w wektorze $\mathbf{a}$.

ZADANIA:

1. Napisz w Matlabie funkcję o nazwie `interpolacja1`, która będzie tworzyć macierz $\mathbf{\Delta X}$ na podstawie wartości x_i danych w wektorze $\mathbf{x}$. Początek funkcji: `function DX = interpolacja1(x)`. Wywołaj w Command Window powyższą funkcję, przyjmując wartości x_i z tabelki na stronie 3.
2. Z równania (5) wyznacz współczynniki a_i przyjmując wartości x_i oraz y_i z tabelki na stronie 3.
3. Napisz w Matlabie funkcję o nazwie `interpolacja2`, która będzie obliczać wartości współczynników funkcji interpolacyjnej b_i na podstawie wartości a_i oraz x_i.
Początek funkcji: `function B = interpolacja2(a,x)`.
4. Napisz w Matlabie funkcję `interpolacja3`, która na podstawie danych wartości x_i oraz b_i obliczy wartości funkcji interpolacyjnej w zadanym przedziale i stworzy jej wykres.
5. Napisz w Matlabie funkcję o nazwie `interpolacja`, która będzie korzystać z funkcji `interpolacja1`, `interpolacja2`, `interpolacja3` oraz dowolnej funkcji rozwiązującej układ równań i na podstawie danych wartości y_i oraz x_i obliczy współczynniki interpolacji i przedstawi funkcję na wykresie. Początek funkcji:

```
function B = interpolacja(x,y).
DX = interpolacja1(x);.
a = uklad_rownan(DX,y);
B = interpolacja2(a,x);
```

Aproksymacja

Celem aproksymacji jest przybliżenie funkcji $f(x)$ – zwanej funkcją aproksymowaną, inną funkcją $Q(x)$ – zwaną funkcją aproksymującą. Obie funkcje – $f(x)$ i $Q(x)$, są określone w tym samym obszarze, przy czym funkcja aproksymowana jest bardzo często znana w postaci dyskretnej, np. z pomiarów.

Dobór odpowiedniej funkcji aproksymującej najczęściej sprowadza się do wyznaczenia wartości współczynników a_j wielomianu:

(7) $$Q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j(x),$$

w którym q_j są funkcjami bazowymi.

Dane pomiarowe są zwykle obarczone błędami, zatem aproksymacja ma na celu przybliżenie danych za pomocą funkcji aproksymującej w sposób najlepszy według przyjętego kryterium. Najczęściej stosuje się kryterium najmniejszych kwadratów.

Aproksymacja średniokwadratowa

Aproksymacja średniokwadratowa zapewnia minimum normy różnicy funkcji $f(x)$ i $Q(x)$. Zadanie aproksymacji sprowadza się zatem do takiego doboru współczynników funkcji aproksymującej aby zminimalizować błąd wyrażony wzorem:

(8) $$S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - Q(x_i)]^2,$$

gdzie x_i (dla i = 0, 1, 2, … n) to punkty pomiarowe, $f(x_i) = y_i$ jest zbiorem znanych wartości funkcji ($n+1$ danych pomiarowych), a $Q(x_i)$ jest zbiorem wartości funkcji aproksymującej. Realizacja aproksymacji zależy od tego jakie funkcje będą przyjęte jako bazowe.

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianowa

Przyjmujemy funkcję aproksymacyjną (równanie 7) w postaci wielomianu rzędu m:

(9) $$Q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \, ,$$

oraz definiujemy błąd:

(10) $$S = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j)^2 \, .$$

Z warunku koniecznego na ekstremum funkcji wielu zmiennych, przyrównując pochodne do zera, otrzymamy układ równań liniowych o niewiadomych współczynnikach $a_0, \; a_1, \; a_2, \; \dots \; a_m$, który można przedstawić w postaci macierzowej:

(11) $$2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{a} - 2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0$$

gdzie $\mathbf{X}$ jest macierzą utworzoną z funkcji bazowych dla wszystkich wartości x_i, $\mathbf{a}$ jest wektorem kolumnowym niewiadomych współczynników, a $\mathbf{y}$ jest wektorem kolumnowym znanych wartości funkcji. W każdym i-tym wierszu (dla i = 0, 1, 2, … n) macierzy $\mathbf{X}$ są umieszczone wartości wszystkich funkcji bazowych dla jednego punktu pomiarowego x_i. Macierz $\mathbf{X}$ ma zatem $n+1$ wierszy oraz $m+1$ kolumn:

(12)
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \cdots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \cdots & x_1^{m-1} & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \cdots & x_2^{m-1} & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \cdots & x_n^{m-1} & x_n^m \end{bmatrix},$$

Rozwiązaniem zadania jest wektor współczynników $\mathbf{a}$:

(13) $$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}.$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	21	10	-1	2	7	12

ZADANIA:

6. Wykonaj wykres dla danych w tabeli powyżej.

7. Przyjmując funkcję aproksymującą w postaci wielomianu drugiego stopnia:

   $Q(x) = ax^2 + bx + c$ znajdź wartości współczynników a, b oraz c.

8. Wykonaj wykres dla funkcji $Q(x)$, dla innych, niż podane w tabeli, wartości x.

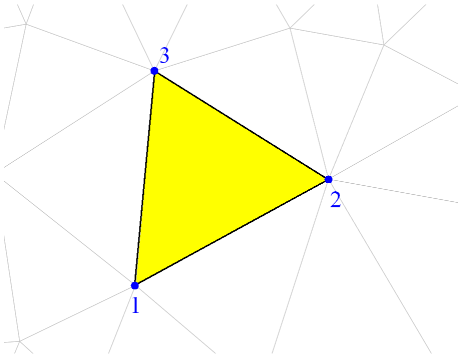
Aproksymacja w przestrzeni dwuwymiarowej

Jako przykład aproksymacji w dziedzinie 2D rozpatrzymy aproksymację stosowaną w metodzie elementów skończonych (MES). Metoda elementów skończonych jest używana do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych w różnych dziedzinach i zagadnieniach techniki. W elektrotechnice stosuje się ją m.in. do obliczania rozkładu pól elektrostatycznych, gdzie poszukuje się wartości skalarnego potencjału elektrycznego V. W metodzie tej obszar obliczeń zostaje podzielony na **elementy skończone**, którymi mogą być np. trójkąty (Rys. 1). Podział obszaru prowadzi do powstania **siatki** elementów skończonych. Punkty przecięcia linii siatki nazywamy **węzłami**.

Zakładając, że wartości funkcji V są znane w węzłach, wartości potencjału elektrycznego wewnątrz elementu aproksymujemy funkcją $V(x, y)$ o następującej postaci:

(**14**) $$V(x, y) = a + bx + cy$$

Współczynniki aproksymacji: a, b, c określa się na podstawie wartości funkcji w węzłach (1, 2, 3), zatem dla każdego z nich równanie (**14**) jest również spełnione. Zapisując równanie (**14**) dla węzłów 1, 2, 3 otrzymuje się układ równań (**15**), z którego można wyznaczyć współczynniki aproksymacji:



Rys. 1 Element o węzłach 1, 2, 3.

(**15**) $$\begin{aligned} V_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ V_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ V_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

(**16**) $$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Znając wartości funkcji w węzłach można obliczyć współczynniki a, b, c i aproksymowane wartości szukanego potencjału w dowolnym punkcie wewnątrz elementu – z równania (**14**). W ten sposób zadanie polegające na obliczeniu rozkładu pola elektrycznego w danym obszarze można zredukować do znalezienia wartości potencjału w węzłach siatki i określenia funkcji aproksymującej, zamiast poszukiwania rozwiązania w postaci funkcji ciągłej $V(x, y)$ w całym obszarze.

ZADANIA:

9. Napisz funkcję, która będzie obliczać wartość potencjału w dowolnym punkcie wewnątrz elementu, na podstawie wartości współczynników aproksymacji (równanie **14**). Argumentami funkcji będą współrzędne punktu (x, y) i wartości współczynników aproksymacji (a, b, c).

10. Napisz funkcję, która będzie obliczać wartości współczynników aproksymacji dla danego elementu, na podstawie wartości potencjałów w węzłach tego elementu (równanie **16**). Argumentami funkcji będą współrzędne węzłów $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ i wartości potencjału w węzłach (V_1, V_2, V_3).

Całkowanie numeryczne

ZADANIA:

11. Napisz funkcję, która będzie obliczać wartość całki dla danych wartości x oraz y. Do zdefiniowania całki wykorzystaj definicję znaną z matematyki.

Zagadnienia na wejściówkę na następne ćwiczenia

1. Różniczkowanie numeryczne

Dana jest funkcja y = f(x), która jest iloczynem dwóch funkcji podstawowych (wielomian, funkcje trygonometryczne, funkcja eksponencjalna, pierwiastek z x*, ułamek – z* x *w mianowniku).*

- *jak definiuje się pochodną funkcji?*
- *wyznacz pochodną z danej funkcji,*
- *oblicz pochodną w punktach* x_1, x_2, x_3,
- *napisz w MATLABie funkcję różniczkującą (zacznij np. tak:* `function d = derivative(x,y)` *)*
- *korzystając z napisanej funkcji oblicz pochodną w wybranych punktach i przedstaw wykres pochodnej z funkcji.*

2. Numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

Obwód złożony z kilku rezystorów i jednej indukcyjności jest załączany do źródła napięcia stałego E.

- *napisz równanie różniczkowe dla tej sytuacji,*
- *oblicz warunek początkowy – prąd na indukcyjności,*
- *oblicz prąd występujący na indukcyjności w stanie ustalonym (po ustaniu procesów przejściowych)*
- *oblicz prąd i(t) w stanie przejściowym*
- *przedstaw wykres prądu w funkcji czasu.*
- *napisz jak rozwiązać zadanie metodą Eulera*