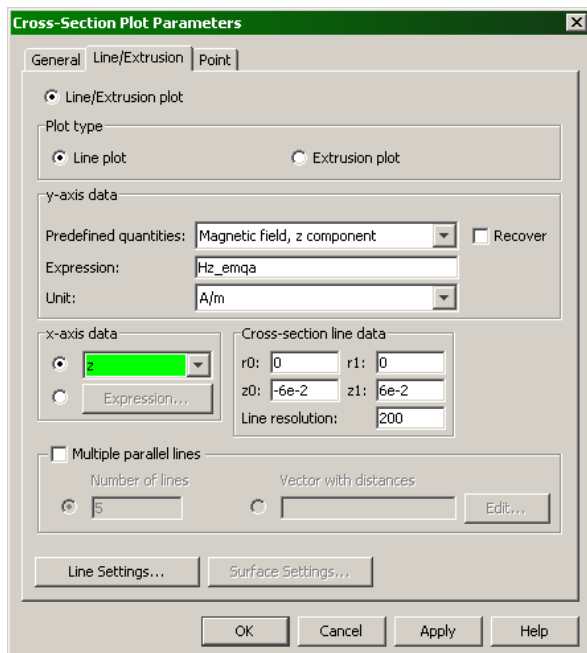


Po kliknięciu OK otwiera się okno w którym rysujemy dwa prostokąty (przestrzeń obliczeń i obszar elementów nieskończonych) i wstawiamy punkt (cewka). Wybieramy z menu programu Draw – Specify Objects – Rectangle, a następnie Draw – Specify Objects – Point i wpisujemy odpowiednie parametry.

Wybieramy z menu programu Physics – Subdomain settings i określamy zewnętrzny obszar jako obszar elementów nieskończonych typu cylindrycznego. Musimy też określić, że punkt, który wstawiliśmy jest w tym przekroju śladem cewki z prądem. Wybieramy z menu programu Physics – Point Settings. Z listy po lewej stronie wybieramy punkt, a w polu po prawej stronie wpisujemy żadaną wartość prądu i klikamy OK. Aby obliczenia były wykonane w symetrii osiowej, ustawiamy oś symetrii wybierając z menu Physics – Boundary Settings. Zaznaczamy krawędź 1 i z listy po prawej stronie wybieramy Boundary condition: Axial symmetry. Klikamy OK.

Obliczenia uruchamiamy wybierając Solve – Solve problem. Z menu Postprocessing możemy wybrać Cross-Section Plot Parameters i narysować wykres zmian pola wzdłuż prostej (Rys.4).

Sprawdź, czy wyniki uzyskane metodą elementów skończonych są takie same jak uzyskane analitycznie. Jeśli tak, to zbuduj model wielozwojowej cewki i oblicz jej pole. Porównaj rozwiązanie z wynikiem uzyskanym analitycznie.



Rys.4 Cross-Section Plot Parameters

Pole magnetyczne cylindrycznej cewki bez rdzenia

Obliczanie pola magnetycznego w otoczeniu cewki powietrznej

1. Wprowadzenie

Obliczanie pola magnetycznego w urządzeniach, w których prądy wymuszające posiadają osiową symetrię można zaliczyć do zadań stosunkowo prostych, o znanym algorytmie rozwiązania.

W środowisku jednorodnym jako zadane wielkości wejściowe przyjmuje się zwykle wyrażenia określające natężenie (indukcję) lub potencjał wektorowy pola magnetycznego wytworzony przez nieskończenie cienki, wiodący prąd, zwój kołowy. Poszukiwane pole wypadkowe otrzymuje się na podstawie zasady superpozycji, przez wektorowe zsumowanie (scalkowanie) wszystkich pól pochodzących od takich elementarnych zwojów, a składających się na obszar wymuszenia w danym urządzeniu. W wyniku takiego postępowania otrzymuje się z reguły wyrażenia zawierające całki eliptyczne zupełne oraz całki z ich kombinacją z funkcjami elementarnymi. W tych przypadkach otrzymanie wyniku liczbowego jest więc uwarunkowane od zastosowania całkowania numerycznego i zrealizowania algorytmu przy pomocy komputera.

2. Całki eliptyczne zupełne

Wprowadza się następujące oznaczenia całek eliptycznych zupełnych:

całka pierwszego rodzaju:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1)$$

całka drugiego rodzaju:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2)$$

całka trzeciego rodzaju:

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (3)$$

gdzie k nazywane jest modułem całki, a n parametrem całki trzeciego rodzaju.

Jeżeli założymy, że całki K , E są funkcjami zmiennej $x = k^2$, to można otrzymać następujące użyteczne równości:

$$2 \frac{dK}{dx} = \frac{E}{x(1-x)} - \frac{K}{x} \quad (4)$$

$$2 \frac{dE}{dx} = \frac{E-K}{x} \quad (5)$$

$$\int K dx = 2[E - (1-x)K] \quad (6)$$

$$\int E dx = \frac{2}{3}[(1+x)E - (1-x)K]. \quad (7)$$

3. Pole magnetyczne elementarnego zwoju kołowego

Na podstawie prawa Biota-Savarta pole magnetyczne w punkcie P wytworzone przez elementarny odcinek dI wiodący prąd o natężeniu I możemy opisać równaniem:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{IdI \times r_0}{r_0^3} \quad (8)$$

gdzie r_0 jest wektorem łączącym środek odcinka dI z punktem P .

6. Obliczenia w programie Matlab

Do obliczeń w programie Matlab wykorzystamy zależności (12) i (13) przedstawiające składowe natężenia pola magnetycznego pochodzącego od pojedynczego zwoju cewki z prądem (Rys. 1). Ze względu na osiową symetrię układu obliczenia wykonujemy w płaszczyźnie $r\theta z$. Jako argumenty funkcji podajemy wartość prądu I i promień przewodu r_0 :

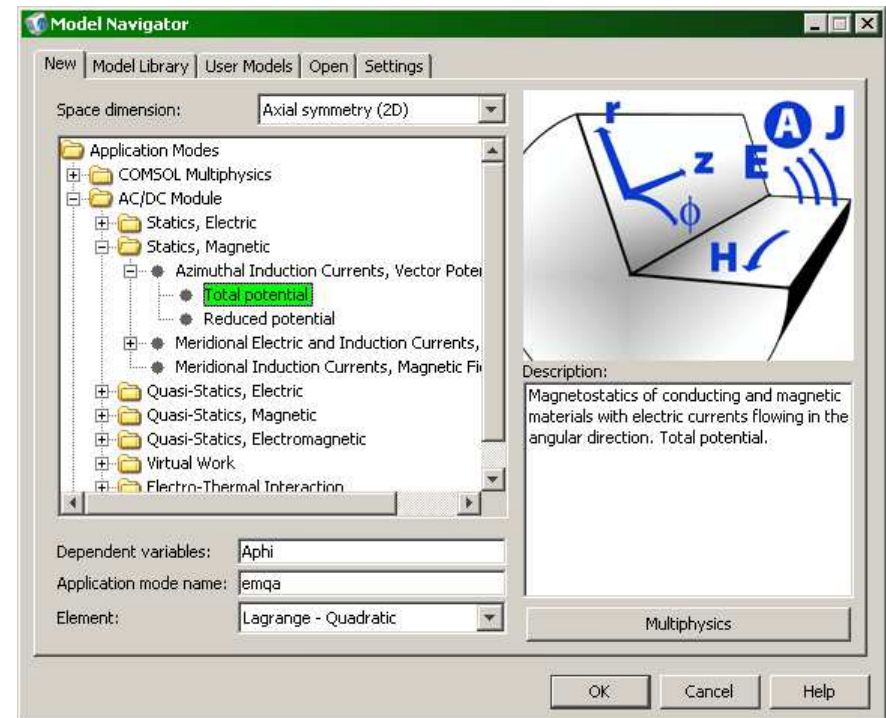
$$[H_r, H_z] = \text{em8}(I, r_0);$$

Natężenie pola jest obliczane w przestrzeni wokół cewki, a następnie za pomocą wykresów przedstawiane są składowe natężenia pola i jego wartość bezwzględna.

7. Obliczenia w programie Comsol Multiphysics

Cewkę możemy też zamodelować w programie Comsol Multiphysics. Po uruchomieniu programu wybieramy zakładkę New w oknie Model Navigator, określamy przestrzeń obliczeń jako symetrię osiową (Space dimension: Axial symmetry (2D)) i wybieramy moduł:

AC/DC Module – Statics, Magnetic – Azimuthal Induction Currents, Vector Potential – Total Potential



Rys.3 Model Navigator

Stąd już po prostych przekształceniach:

$$\dots = \frac{2}{\rho r} \sqrt{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2} \left[\left(1 - \frac{k_v^2}{2}\right) K(k_v) - E(k_v) \right] \quad (25)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$H_r = \frac{J}{2\pi r} \cdot \int_d^{d+c} \sum_{v=1}^2 (-1)^{v+1} \sqrt{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2} \left[\left(1 - \frac{k_v^2}{2}\right) K - E \right] d\rho \quad (26)$$

Przeprowadzając podobne obliczenia dla składowej osiowej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(z-z_v)(\rho-r\cos\varphi)d\varphi}{r_0(r^2-\rho^2-2\rho r\cos\varphi)} &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z-z_v)(\rho+r-2r\sin^2\beta)d\beta}{\sqrt{(z-z_v)^2+(r+\rho)^2-4\rho r\sin^2\beta} [(r+\rho)^2-4\rho r\sin^2\beta]} = \\ &= \frac{2(z-z_v)k_v}{(r+\rho)\sqrt{\rho r}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2r}{r+\rho} \sin^2\beta - 1}{(1-n\sin^2\beta)\sqrt{1-k_v^2\sin^2\beta}} d\beta = \dots \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie:

$$n = \frac{4r\rho}{(r+\rho)^2}, \quad k_v^2 = \frac{4r\rho}{(z-z_v)^2 + (r+\rho)^2}, \quad (28)$$

skąd:

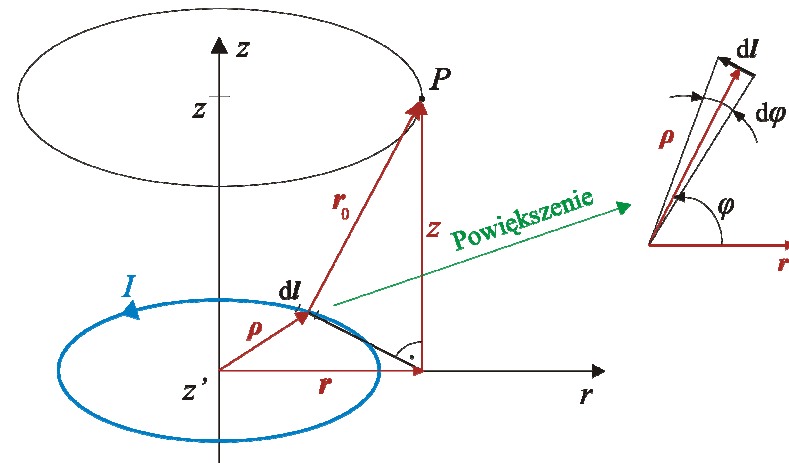
$$\dots = \frac{-2}{\rho} \frac{(z-z_v)}{\sqrt{(z-z_v)^2 + (r+\rho)^2}} \left[K + \frac{\rho-r}{\rho+r} \Pi(n, k_v) \right] \quad (29)$$

i ostatecznie składowa osiowa:

$$H_z = \frac{J}{2\pi} \int_d^{d+c} \sum_{v=1}^2 (-1)^v \frac{(z-z_v)}{\sqrt{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2}} \left[K(k_v) + \frac{\rho-r}{\rho+r} \Pi(n, k_v) \right] d\rho \quad (30)$$

5. Literatura

1. Ryszard Sikora, **Teoria Pola Elektromagnetycznego**, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1997, wydanie trzecie zmienione, str. 134–142
2. Maciej Krakowski, **Elektrotechnika Teoretyczna t.2**, Wydawnictwa Naukowe PWN, 1999, wydanie szóste, str. 79–94



Rys.1 Układ pojedynczego zwoju cewki z prądem

Wykorzystując Rys. 1 oblicza się w układzie współrzędnych kołowo-walcowych (r, φ, z) następujące wielkości:

$$dl = -dl \sin\varphi \mathbf{1}_r + dl \cos\varphi \mathbf{1}_\varphi \quad (9)$$

$$dl = -\rho \sin\varphi d\varphi \mathbf{1}_r + \rho \cos\varphi d\varphi \mathbf{1}_\varphi \quad (9a)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + \mathbf{z} - \rho = (r - \rho \cos\varphi) \mathbf{1}_r - \rho \sin\varphi \mathbf{1}_\varphi + z \mathbf{1}_z \quad (10)$$

$$r_0^2 = z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi \quad (10a)$$

$$dl \times \mathbf{r}_0 = \rho z \cos\varphi d\varphi \mathbf{1}_r + \rho z \sin\varphi d\varphi \mathbf{1}_\varphi + \rho(\rho - r \cos\varphi) d\varphi \mathbf{1}_z \quad (11)$$

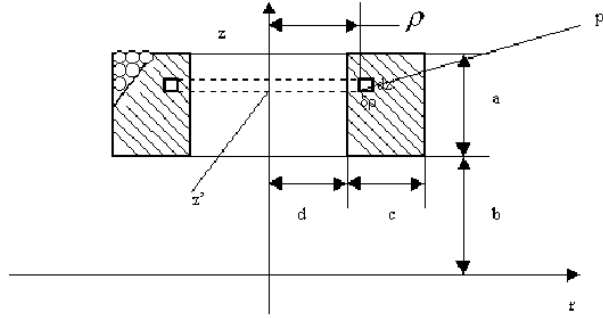
Uwzględniając równania (9) i (11) oraz fakt, że ze względu na symetrię układu składowa φ natężenia pola magnetycznego jest równa zero, pole magnetyczne zwoju kołowego opisuje się przy pomocy wyrażień:

$$H_r = \frac{I}{4\pi} \rho z \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_0^3} d\varphi \quad (12)$$

$$H_z = \frac{I}{4\pi} \rho \int_0^{2\pi} \frac{(\rho - r \cos\varphi)}{r_0^3} d\varphi \quad (13)$$

4. Pole magnetyczne cylindrycznej cewki o skończonych wymiarach

Na Rys.2 pokazano przekrój cylindrycznej cewki o wewnętrznej średnicy d . Parametry cewki: wysokość cewki a , szerokość cewki c . Zakładając, że wielowarstwowe uzwojenie zostało nawinięte dostatecznie cienkim drutem i wystarczająco gęsto to realne zagadnienie nieciągłe można zastąpić zagadnieniem ciągłym.



Rys.2 Przekrój cylindrycznej cewki

Tym samym cewkę można traktować jako pierścien wiodący prąd stały. Oczywiście gęstość prądu J w takim modelu powinna odpowiadać rzeczywistemu stopniowi wypełnienia uzwojenia oraz spełniać narzucone ograniczenia na maksymalną gęstość prądu w pojedynczym przewodzie.

Pole magnetyczne pochodzące od elementarnego zwoju kołowego o promieniu ρ i przekroju $d\rho dz'$, wiodącego prąd $Jd\rho dz'$ opisują równania analogiczne do (12) i (13) o postaci:

$$dH_r = \frac{Jd\rho dz'}{4\pi} \rho(z-z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{r_0^3} \quad (14)$$

$$dH_z = \frac{Jd\rho dz'}{4\pi} \rho \int_0^{2\pi} \frac{(\rho - r \cos\varphi)}{r_0^3} d\varphi, \quad (15)$$

gdzie:

$$r_0 = \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi}. \quad (16)$$

Stosując zasadę superpozycji, to znaczy całkując (14) i (15) po powierzchni przekroju pierścienia otrzymujemy pole wypadkowe:

$$H_r = \frac{J}{4\pi} \int_d^{d+c} \rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi \int_b^{b+a} \frac{z-z'}{r_0^3} d\rho d\varphi dz' \quad (17)$$

$$H_z = \frac{J}{4\pi} \int_d^{d+c} \rho \int_0^{2\pi} (\rho - r \cos\varphi) \int_b^{b+a} \frac{d\rho d\varphi dz'}{r_0^3}. \quad (18)$$

Po obliczeniu całki względem z' równania (17) i (18) można przedstawić w postaci:

$$H_r = \frac{J}{4\pi} \int_d^{d+c} \rho \sum_{v=1}^2 (-1)^{v+1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi d\rho}{\sqrt{(z-z_v)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi}} \quad (19)$$

$$H_z = \frac{J}{4\pi} \int_d^{d+c} \rho \sum_{v=1}^2 (-1)^{v+1} \int_0^{2\pi} \frac{-(z-z_v)(\rho - r \cos\varphi) d\varphi d\rho}{r_0(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\varphi)} \quad (20)$$

gdzie:

$$z_1 = b + a$$

$$z_2 = b$$

(21)

$$r_0 = \sqrt{(z-z_v)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi}$$

Powyższe całki przekształcamy tak, by zawierały całki eliptyczne zupełne. W tym celu dokonujemy podstawienia:

$$\varphi = \pi - 2\beta,$$

$$d\varphi = -2d\beta,$$

(22)

$$\cos\varphi = -2\sin^2\beta - 1,$$

przy którym zmieniamy granice całkowania:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \\ 0 \end{array} \right\} \varphi \longleftrightarrow \left. \begin{array}{l} -\pi/2 \\ \pi/2 \end{array} \right\} \beta$$

Uwzględniając podstawienie (22) otrzymujemy w przypadku składowej radialnej pola następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{(z-z_v)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\varphi}} &= - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2(2\sin^2\beta - 1)d\beta}{\sqrt{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2 - 4\rho r \sin^2\beta}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1 - k_v^2 \sin^2\beta}} d\beta \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie :

$$k_v^2 = \frac{4\rho r}{(z-z_v)^2 + (\rho+r)^2}. \quad (24)$$