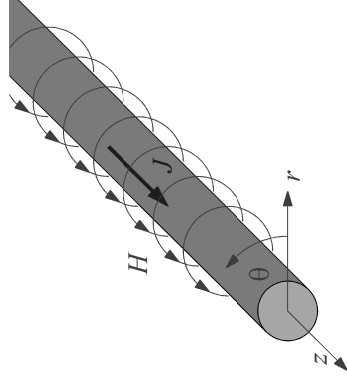


Zjawisko naskórkowości

Obliczanie pola elektrycznego i magnetycznego oraz gęstości prądu zmiennego w przewodzie

Rozpatrujemy przewód w postaci walca o przekroju kołowym i promieniu R z prądem sinusoidalnie zmiennym o wartości skutecznej równej I . Zakładamy, że przewód jest odosobniony i nieskończenie długi. Przyjmujemy walcowy układ współrzędnych (r, θ, z) tak, że oś Oz jest osią walca.



Rys. 1 Odosobniony przewód w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z

Przyjęte założenia powodują, że wektor natężenia pola elektrycznego $\underline{\mathbf{E}}$ i wektor gęstości prądu \mathbf{J} mają tylko jedną składową (wzdłuż osi przewodu) i zależą tylko od jednej współrzędnej przestrzennej:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_z(r), \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \underline{J}_z(r)$$

Z drugiego równania Maxwella dla pól harmonicznych niskich częstotliwości

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} \quad (2)$$

obliczamy rotację wektora $\underline{\mathbf{E}}$ i widzimy, że natężenie pola magnetycznego ma również tylko jedną składową, prostopadłą do pola elektrycznego:

$$\underline{H}_\theta = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{d\underline{E}_z}{dr}. \quad (3)$$

Z pierwszego równania Maxwella dla pól harmonicznych niskich częstotliwości

$$\text{rot } \underline{H} = \sigma \underline{E} \quad (4)$$

po zastosowaniu zależności na rotację w układzie cylindrycznym otrzymujemy:

$$\frac{dH_0}{dr} + \frac{1}{r} H_0 = \sigma E_z. \quad (5)$$

Z równań (3) i (5) otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu – jest to równanie Bessela:

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} - k^2 E_z = 0, \quad (6)$$

gdzie: $k = (j\omega\mu\sigma)^{1/2}$.

Rozwiązanie równania (6) wyraża się za pomocą funkcji Bessela, w postaci:

$$\underline{E}_z = A I_0(kr) + B K_0(kr), \quad (7)$$

gdzie: A, B – stałe całkowania;

$I_0(kr)$, – zmodyfikowana funkcje Bessela zerowego rzędu, pierwszego rodzaju

$K_0(kr)$ – zmodyfikowana funkcje Bessela zerowego rzędu, drugiego rodzaju.

Wartości funkcji Bessela są znane, zatem do wyznaczenia pozostają tylko stałe A i B. Wyznaczymy je z warunków jakie muszą być spełnione w środku przewodu oraz na jego powierzchni. Ponieważ $K_0(kr) \rightarrow \infty$ gdy $r \rightarrow 0$, stałą B w równaniu (7) musimy przyjąć zerową: $B = 0$ (natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodu musi mieć wartość skończoną). Równanie (3) przepiszemy wtedy w postaci:

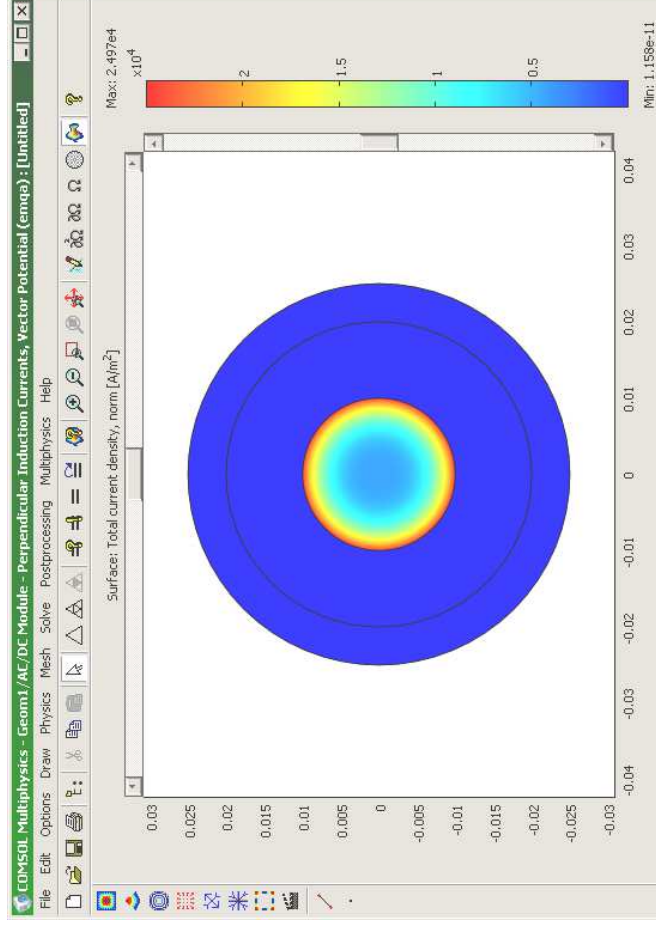
$$\underline{H}_0 = \frac{A}{j\omega\mu} \frac{d}{dr} I_0(kr) = \frac{Ak}{j\omega\mu} I_1(kr) = \frac{A\sigma}{k} I_1(kr). \quad (8)$$

Jednocześnie, na podstawie prawa przepływu znajdujemy natężenie pola magnetycznego na powierzchni przewodnika:

$$\underline{H}_0 \Big|_{r=R} = \frac{I}{2\pi R}. \quad (9)$$

Podstawiając w równaniu (8) $r = R$ i przyrównując do (9) znajdujemy stałą A:

$$A = \frac{kI}{2\pi R\sigma} \frac{1}{I_1(kR)}, \quad (10)$$

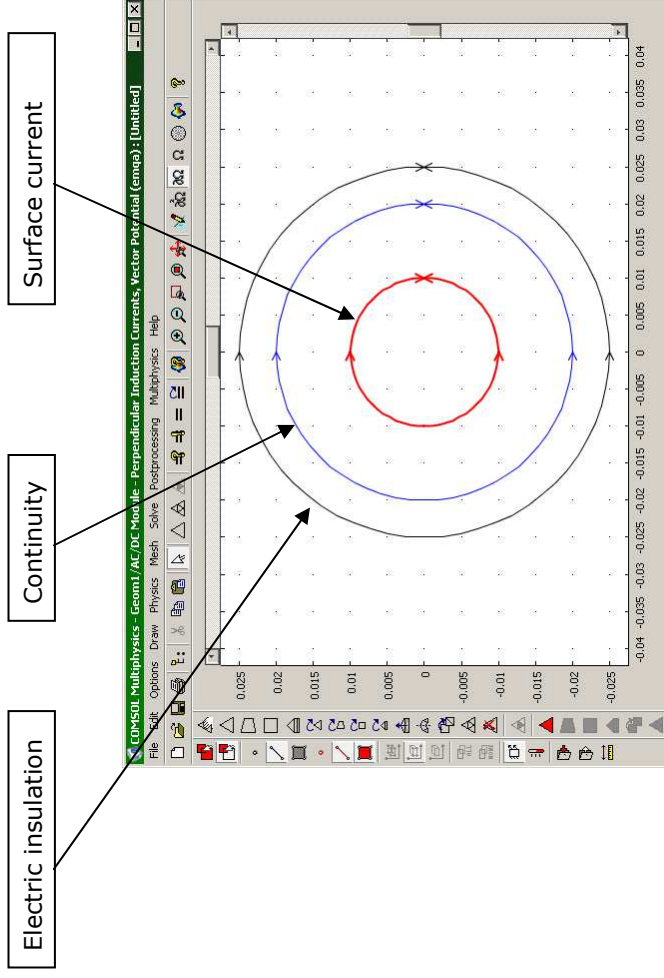


Rys. 4 Wyniki – gęstości prądu w przewodzie

Domyślny sposób wyświetlania wyników nie daje możliwości dokładnego odczytania wartości gęstości prądu, szczególnie dla małych wartości częstotliwości i przewodności przewodu. Aby zrobić wykres gęstości prądu wzdłuż promienia przekroju przewodu wybieramy z menu **Postprocessing / Cross-Section Plot Parameters...** Na zakładce **Line/Extrusion** wybieramy w polu **y-axis data, Predefined quantities:** **Total Current density, norm**. W polu **Cross-section line data** ustawiamy współrzędne punktów wyznaczających prostą, wzdłuż której chcemy narysować wykres. Początek prostej (x0, y0) powinien się znajdować w środku przewodu, a koniec (x1, y1) na jego powierzchni.

W sprawozdaniu proszę podać przyjęte dane, krótko omówić sposoby uzyskania rozwiązań obiema metodami, przedstawić i porównać wyniki obliczeń oraz zanotować wnioski. Proszę zamieścić odpowiedź na pytanie: jak w praktyce wykorzystuje się zjawisko naskórkowości?

W menu **Physics / Boundary Settings...** należy ustawić warunek brzegowy **Electric insulation** dla zewnętrznych granic (1, 2, 7, 12), oraz warunek brzegowy **Surface current**, w którym wpisujemy wartość J_{sz} obliczoną z zależności (9) na powierzchni przewodu – granice (5, 6, 9, 10).



Rys. 3 Warunki brzegowe

Częstotliwość wprowadzamy w oknie, które otwieramy wybierając z menu: **Physics / Scalar Variables...**

W opcjach siatki elementów skończonych (**Mesh / Free Mesh Parameters...**) ustawiamy bardzo gęstą siatkę (**Extremely fine**).

Po obliczeniach (**Solve / Solve Problem**) zmieniamy wyświetlaną wielkość (**Postprocessing / Plot Parameters...**, zakładka **Surface**) na gęstość prądu: **Total Current density, norm**.

którą możemy podstawić do równań (7) i (8) otrzymując wyrażenia opisujące interesującą nas wielkość wewnątrz przewodu, czyli natężenie pola elektrycznego:

$$\underline{E}_z = \frac{I}{\pi R^2 \sigma} \frac{I_0(kr)}{2 I_1(kR)} \quad (11)$$

i natężenie pola magnetycznego:

$$\underline{H}_0 = \frac{I}{2\pi R} \frac{I_1(kr)}{I_1(kR)}. \quad (12)$$

Gęstość prądu w przewodzie obliczamy mnożąc natężenie pola elektrycznego przez przewodność σ :

$$\underline{J}_z = \sigma \underline{E}_z = \frac{I}{\pi R^2} \frac{kR}{2} \frac{I_0(kr)}{I_1(kR)}. \quad (13)$$

Widać więc, że rozkład prądu zmiennego w przewodzie nie jest równomierny w całym przekroju. Pierwszy człon w równaniu (13) to gęstość prądu jaką obliczylibyśmy przy prądzie stałym. Obliczając gęstość prądu z równania (13), przekonamy się, że występuje wypieranie prądu na zewnątrz. Zjawisko to nasila się ze wzrostem częstotliwości i przy bardzo dużych częstotliwościach cały prąd istnieje praktycznie tylko w cienkiej warstwie przewodnika, tuż przy jego powierzchni.

ZADANIA

1. Napiisać w języku Matlab funkcję obliczającą gęstość prądu w przewodzie o przekroju kołowym – równanie (13). Argumentami funkcji powinny być: wartość prądu I , promień przewodu R , przewodność materiału σ i częstotliwość prądu f .
2. Korzystając z funkcji obliczyć gęstości prądu wewnątrz przewodu o podanych parametrach i wykonać wykres gęstości prądu J wzdłuż promienia r . Przeprowadzić obliczenia dla różnych częstotliwości f , różnych przewodności σ i różnych promieni R przewodu.
3. Dla przyjętych danych zbudować model przewodu w programie Comsol Multiphysics i obliczyć rozkład gęstości prądu w przekroju przewodu. Wykonać wykres gęstości prądu J wzdłuż promienia r .
4. Porównać wyniki uzyskane z metody analitycznej (Matlab) z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (Comsol), skomentować ewentualne różnice.

Funkcja w programie MATLAB

Funkcję tworzymy wybierając z menu programu MATLAB: File/New/M-file. W pierwszej linii wpisujemy słowo `function` a po nim wartość obliczaną w funkcji, znak `=`, nazwę funkcji i w nawiasie argumenty:

function `J=nazwa_funkcji(arg1,arg2,arg3)`

Argumenty funkcji możemy wprowadzać jako wektory, np.:

`r = linspace(0,R,20)` – 20 liniowo rozłożonych punktów od zera do R.

Funkcje Bessela w języku MATLAB wprowadzamy w następujący sposób:

$I_0(x)$: `I0 = besseli(0,x)`; gdzie: 0 oznacza rząd funkcji,

$I_1(x)$: `I1 = besseli(1,x)`; x oznacza argument funkcji

Pozostałe funkcje używane przy obliczeniach:

potęgowanie: $y = x^z$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x}$

wartość bezwzględna: $y = |x|$; $y = x^z$

$y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x}$

Jedność urojoną wprowadzamy jako `1j` lub jako `i`. Jeśli liczba zespolona ma część rzeczywistą i urojoną, to wprowadzamy tę liczbę jako sumę: `3 + 4j` oznacza to samo co: `3 + 4*j`. Ponieważ argumentami funkcji Bessela w równaniu (13) są liczby zespolone, to wynikami też będą wartości zespolone. O gęstości prądu informuje nas wtedy wartość bezwzględna z liczby zespolonej.

Do narysowania wykresu gęstości prądu wzdłuż promienia przewodu możemy użyć funkcji `plot`:

`plot(r,abs(J))`

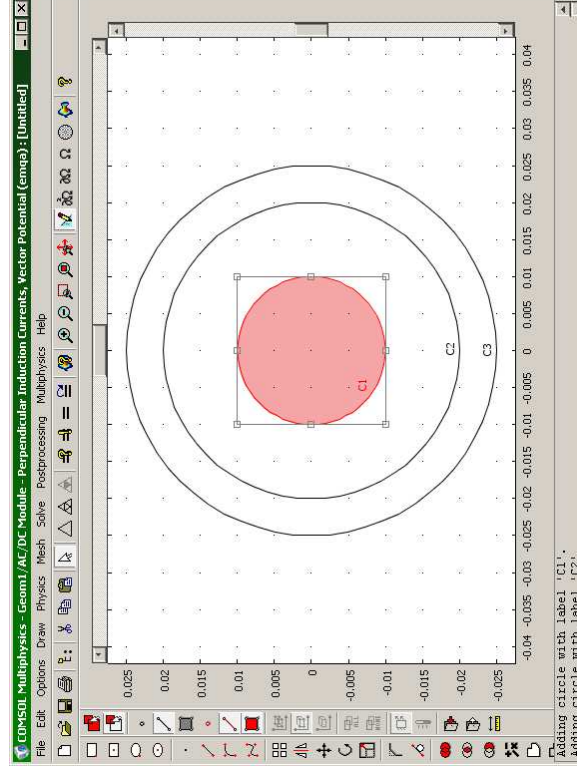
Wartości przewodności: dla miedzi $\sigma = 60 \text{ MS/m}$, dla złota $\sigma = 41 \text{ MS/m}$, dla aluminium $\sigma = 37 \text{ MS/m}$, dla brązu $\sigma = 27 \text{ MS/m}$, dla mosiądzu $\sigma = 21 \text{ MS/m}$.

Program COMSOL Multiphysics

Do zbudowania modelu przewodu w programie należy wybrać układ dwuwymiarowy (2D) – obliczenia wykonujemy w płaszczyźnie prostopadłej do osi przewodu:

AC-DC Module
Quasi-Statics, Magnetics
Perpendicular Induction Currents
Time-harmonic analysis

Należy narysować koło (**Draw** – **Specify Object** – **Circle**) odpowiadającą przekrojowi przewodu – najlepiej ze środkiem w punkcie (0, 0), następnie obszar zewnętrzny również jako koło, np. dwukrotnie większe od przewodu i jeszcze jeden, nieco większy obszar zewnętrzny (C3 na Rys. 2) dla obszaru elementów nieskończonych.



Rys. 2 Model przewodu w programie Comsol Multiphysics

W menu **Physics / Subdomain Settings...** na zakładce **Electric Parameters** dla obszaru wewnętrznego – przewodu (powinien to być obszar 3) należy ustawić tylko wartość przewodności, pozostałe wartości dla wszystkich obszarów zostawić domyślne.

Na zakładce **Infinite Elements** dla obszaru zewnętrznego (obszar o numerze 1) należy wybrać z listy **Type of infinite element**: **Cylindrical** i pozostawić domyślnie przyjęte przez program wartości.