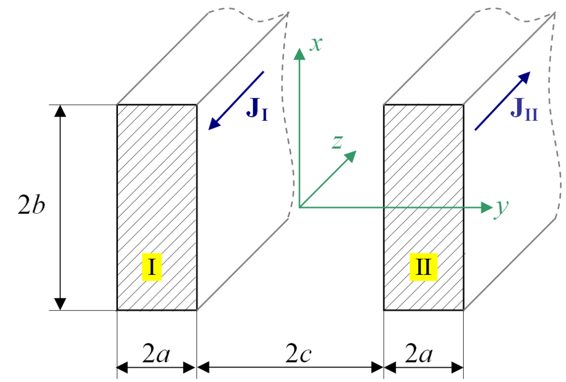
Efekt zbliżenia

Obliczanie pola elektrycznego i magnetycznego oraz gęstości prądu zmiennego w przewodach

Rozważamy dwie równoległe, nieskończenie długie szyny o szerokości $2b$ i grubości $2a$ odległe od siebie o $2c$. Zakładamy, że szyny te są cienkie ($a \ll b$) oraz, że odległość między nimi jest znacznie mniejsza od ich szerokości ($c \ll a$). Prądy w szynach są sinusoidalnie zmienne, mają wartości skuteczne równe I, a ich fazy są przesunięte o 180°. Przyjmujemy układ współrzędnych kartezjański (x, y, z) jak na Rys. 1 (przekroje szyn leżą w płaszczyźnie $x0y$).



Rys. 1 Dwie równoległe szyny.

Przyjęte założenia powodują, że powyższe zagadnienie można w przybliżeniu traktować jako problem jednowymiarowy tzn. problem, w którym wektory pola elektromagnetycznego są definiowane za pomocą tylko jednej odpowiedniej składowej przestrzennej:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \underline{H}\,\mathbf{1}_x \\ \mathbf{E} &= \underline{E}\,\mathbf{1}_z \\ \mathbf{J} &= \underline{J}\,\mathbf{1}_z \end{aligned} \tag{1}$$

Wektory te w obszarach przewodzących (szyny I i II) spełniają jednowymiarowe równanie Helmholtza o postaci:

$$\frac{d^2 \underline{F}}{dy^2} - k^2 \underline{F} = 0 \tag{2}$$

gdzie $k^2 = j\omega\mu\sigma$, σ – przewodność materiału szyn, a $\underline{F}$ jest jednym z wektorów $\underline{H}$, $\underline{E}$, $\underline{J}$.

Ponieważ, przy przyjętych założeniach, pole magnetyczne pomiędzy szynami jest jednorodne, a na zewnątrz szyn jest równe zeru (prawo Ampera), to powyższe zagadnienie najłatwiej jest rozwiązać wykorzystując wektor $\underline{H}$. Pełne sformułowanie zagadnienia wygląda zatem następująco:

równanie:

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dy^2} - k^2 \underline{H} = 0 \tag{3}$$

warunki brzegowe:

$$\underline{H}_{y=-c} = -\frac{I}{2b} \qquad \underline{H}_{y=c} = -\frac{I}{2b}$$

$$\underline{H}_{y=-c-2a} = 0 \qquad \underline{H}_{y=c+2a} = 0 \tag{4}$$

Ze względu na symetrię wystarczy znaleźć rozwiązanie zagadnienia (3)-(4) tylko w obszarze jednej szyny. Rozwiązanie ogólne równania (3) ma postać:

$$\underline{H} = \mathrm{C}_1 \cdot \cosh ky + \mathrm{C}_2 \cdot \sinh ky \tag{5}$$

skąd po uwzględnieniu warunków brzegowych (4) otrzymujemy zależność:

$$\underline{H} = -\frac{I}{2b}\frac{\sinh k(|y| - c - 2a)}{\sinh 2ka} \tag{6}$$

Impedancję jednej szyny (na jednostkę długości) wyznaczamy stosując twierdzenie Poyntinga. Jest ona równa:

$$\underline{Z} = \frac{k}{2b\sigma}\operatorname{cth} 2ka \tag{7}$$

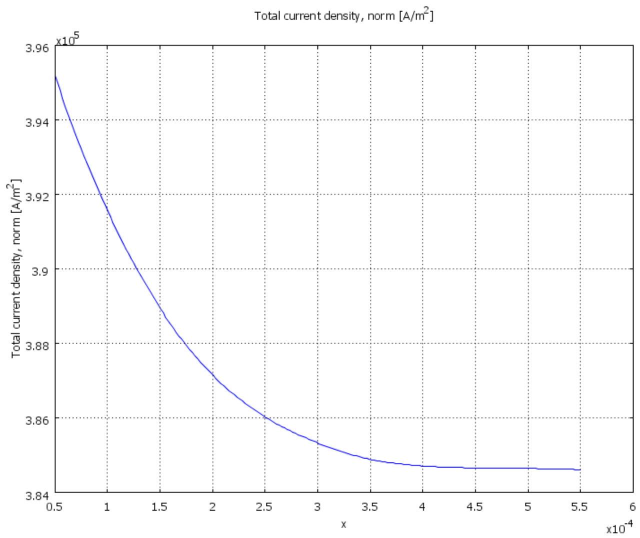
Rozkład gęstości prądu w szynach opisuje równanie:

$$\underline{J} = \sigma\underline{E} = \pm\frac{I}{2b}k\frac{\cosh\left(k(|y| - c - 2a)\right)}{\sinh\left(2ka\right)} \tag{8}$$

4. Częstotliwość wprowadzamy w oknie, które otwieramy wybierając z menu: **Physics / Scalar Variables...**
5. Warunki brzegowe pozostawiamy takie, jak domyślnie przyjęte i uruchamiamy obliczenia - **Solve / Solve Problem** .
6. Wykres gęstości prądu w szynach narysujemy za pomocą funkcji dostępnej w menu: **Postprocessing / Cross-Section Plot Parameters...**. Na zakładce Line / Extrusion wybieramy: Predefined quantities: Total current density, norm jako zmienną na osi *y*. W polu Expression pojawi się wybrana wielkość.

   W polu x-axis data wybieramy x i określamy dwa punkty wyznaczające prostą, wzdłuż której będzie narysowany wykres: x0, y0 i x1, y1 (prosta powinna przechodzić przez obie szyny, w połowie ich wysokości).

   Dla lepszego zobrazowania zmienności gęstości prądu wewnątrz szyny należy wybrać współrzędne punktów x0, y0 i x1, y1 tak, aby wyznaczony przez nie odcinek przechodził tylko przez jedną szynę (zob. Rys. 3).



Rys. 3 Gęstość prądu wewnątrz szyny.

Szyny w programie COMSOL Multiphysics

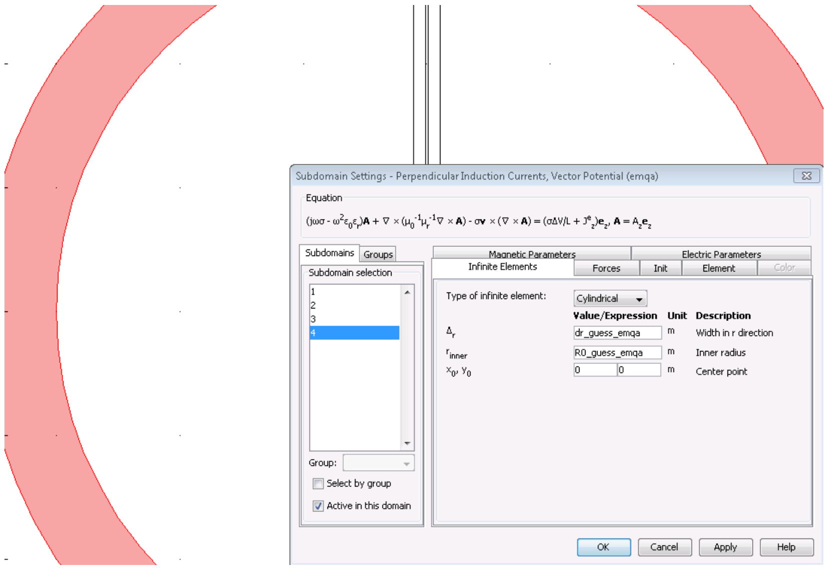
1. Wybieramy układ dwuwymiarowy: Space dimension: 2D, oraz moduł do analizy harmonicznej:

   AC/DC Module
   Quasi Statics, Magnetic
   Perpendicular Iduction Currents
   Time-harmonic analysis

2. Modelujemy szyny w przekroju, jako dwa równoległe do siebie prostokąty o szerokości $2a$ i wysokości $2b$, umieszczone w płaszczyźnie $x0y$ tak jak na Rys. 1 (wybieramy z menu: **Draw**, **Specify Objects**, **Rectangle**). Następnie otaczamy je okręgiem, któremu ustawimy parametry jak dla powietrza i drugim nieco większym okręgiem dla obszaru elementów nieskończonych .

3. Wewnątrz szyn przyjmujemy odpowiednie przewodności oraz gęstości prądu – o przeciwnych znakach w każdej szynie (z głównego menu programu wybieramy: **Physics / Subdomain Settings** i wpisujemy odpowiednie wartości w pola na zakładce Electric Parameters).

   Dla obszaru zewnętrznego wybieramy zakładkę Infinite Elements i z rozwijanej listy Type of infinite elements wybieramy Cylindrical pozostawiając nie zmienione domyślnie przyjęte parametry.



Rys. 2 Wybór rodzaju elementów nieskończonych w obszarze 4.

Wprowadzając oznaczenie $\underline{J}_0$ określające wartość gęstości prądu na zewnętrznych stronach szyn:

$$\underline{J}_0 = \frac{\underline{I}}{2b}\frac{k}{\sinh(2ka)} \qquad (9)$$

otrzymujemy ostatecznie wyrażenie:

$$\underline{J} = \pm\underline{J}_0 \cosh\left(k(|y| - c - 2a)\right) \qquad (10)$$

gdzie znak plus jest związany z prawą szyną, a minus z lewą.

Z powyższych rozważań wynika, że prąd zmienny w jednej szynie wywiera wpływ na rozkład prądu w drugiej szynie. Obliczając gęstość prądu z równania (8), przekonamy się, że występuje „wciąganie” prądu w kierunku środka układu. Zjawisko to nosi nazwę ZJAWISKA ZBLIŻENIA.

Zadania

1. Napisać w programie MATLAB funkcję obliczającą gęstość prądu w szynach – równanie (8). Korzystając z funkcji obliczyć gęstości prądu (wzdłuż osi y) wewnątrz szyn o podanych parametrach. Porównać rozkład gęstości prądu w szynach z rozkładem jaki otrzymalibyśmy dla prądu stałego. Przeprowadzić obliczenia dla trzech częstotliwości: $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 500$ Hz i $f_3 = 5$ kHz, dla prądu o natężeniu $I = 5$ A, kilku różnych przewodności (dla miedzi σ = 60 MS/m, dla złota σ = 41 MS/m, dla aluminium σ = 37 MS/m, dla brązu σ = 27 MS/m, dla mosiądzu σ = 21 MS/m) oraz różnych wymiarów szyn:

1) $2a$ = 0,5 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,02 mm.
2) $2a$ = 0,5 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,05 mm.
3) $2a$ = 0,5 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,10 mm.
4) $2a$ = 0,5 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,15 mm.
5) $2a$ = 0,5 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,20 mm.
6) $2a$ = 0,25 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,1 mm.
7) $2a$ = 0,50 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,1 mm.
8) $2a$ = 0,75 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,1 mm.
9) $2a$ = 1,00 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,1 mm.
10) $2a$ = 1,50 mm,	2b = 25 mm,	c = 0,1 mm.

11) 2a = 0,5 mm, 2b = 20 mm, c = 0,1 mm.
12) 2a = 0,5 mm, 2b = 25 mm, c = 0,1 mm.
13) 2a = 0,5 mm, 2b = 30 mm, c = 0,1 mm.
14) 2a = 0,5 mm, 2b = 35 mm, c = 0,1 mm.
15) 2a = 0,5 mm, 2b = 40 mm, c = 0,1 mm.

16) 2a = 30 mm, 2b = 150 mm, c = 10 mm.
17) 2a = 30 mm, 2b = 150 mm, c = 15 mm.
18) 2a = 30 mm, 2b = 150 mm, c = 20 mm.
19) 2a = 30 mm, 2b = 150 mm, c = 25 mm.
20) 2a = 30 mm, 2b = 150 mm, c = 30 mm.

21) 2a = 10 mm, 2b = 150 mm, c = 20 mm.
22) 2a = 20 mm, 2b = 150 mm, c = 20 mm.
23) 2a = 40 mm, 2b = 150 mm, c = 20 mm.
24) 2a = 50 mm, 2b = 150 mm, c = 20 mm.

25) 2a = 30 mm, 2b = 50 mm, c = 20 mm.
26) 2a = 30 mm, 2b = 100 mm, c = 20 mm.
27) 2a = 30 mm, 2b = 200 mm, c = 20 mm.
28) 2a = 30 mm, 2b = 250 mm, c = 20 mm.

2. Zamodelować szyny w programie Comsol i obliczyć gęstości prądów dla tych samych danych.

W sprawozdaniu proszę podać przyjęte dane, krótko omówić sposoby uzyskania rozwiązań obiema metodami, przedstawić i porównać wyniki obliczeń oraz zanotować wnioski. Na podstawie wyników narysować zależność gęstości prądu w wybranych punktach od zmienianego parametru (*a*, *b* lub *c*, dla wszystkich częstotliwości). Porównując wyniki z obu metod proszę określić różnice, oraz wyjaśnić dlaczego rozwiązania nie są identyczne i które z nich jest prawdziwsze.

Funkcje w programie MATLAB

Funkcję tworzymy wybierając z menu programu MATLAB: File/New/Script lub File/New/Function. W pierwszej linii wpisujemy słowo `function` a po nim: wartość obliczaną w funkcji, znak =, nazwę funkcji i w nawiasie argumenty:

```
function J=nazwa_funkcji(a,b,c,I,sigma,f)
```

Funkcje używane przy obliczeniach:

funkcja tworząca wektor 20 liniowo rozłożonych punktów od `c` do `c+2*a`:

```
y = linspace(c,c+2*a,20) –
```

sinus hiperboliczny:

```
y = sinh(x)
```

cosinus hiperboliczny:

```
y = cosh(x)
```

Ponieważ argumentami funkcji w równaniu (8) są liczby zespolone, to wynikiem też będą wartości zespolone. O gęstości prądu informuje nas wtedy wartość bezwzględna z liczby zespolonej:

```
y = abs(x)
```

Do narysowania wykresu gęstości prądu wzdłuż zmiennej *y* na końcu funkcji wpisujemy polecenie:

```
plot(y,abs(J))
```