

Indukcja elektromagnetyczna

Obliczanie indukcyjności wzajemnej i indukowanego prądu

1. Podstawy teoretyczne

Pole magnetyczne \mathbf{B} wzbudzone przez przewód l z prądem o natężeniu I w dowolnym punkcie P leżącym poza przewodem obliczamy z prawa Biota – Savarta według wzoru:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

gdzie \mathbf{r} jest wektorem łączącym odcinek $d\mathbf{l}$ przewodu z punktem pomiaru pola, a μ_0 jest przenikalnością magnetyczną, dla powietrza: $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Szczególnym przypadkiem zastosowania powyższej zależności jest obliczenie pola magnetycznego w środku zwoju kołowego o promieniu R_1 . Wektor indukcji magnetycznej będzie miał w takiej sytuacji tylko jedną składową – prostopadłą do płaszczyzny zwoju. Stosując wzór (1) dla tego przypadku można zauważyć, że odległość między przewodem a środkiem zwoju jest stała i stanowi promień R_1 okręgu. Ponadto dla każdego punktu na zwoju wektor $d\mathbf{l}$ jest prostopadły do promienia, można zatem wzór (1) przekształcić do postaci (zob. instrukcję do ćwiczenia *Pole magnetyczne przewodnika z prądem*), z której obliczamy wartość indukcji magnetycznej:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R_1}. \quad (2)$$

Jeżeli prąd w zwoju zmienia się w czasie, w dowolny sposób, to indukowane pole magnetyczne również będzie tak samo zmienne w czasie. Równanie (2) pozostanie prawdziwe jeśli wielkości I oraz B zastąpimy funkcjami czasu $i(t)$ oraz – tak samo zależną od czasu – $B(t)$. W dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać wektorem $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ oraz wartością skuteczną prądu I .

Z drugiego równania Maxwella wiemy, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{E} jest wektorem natężenia pola elektrycznego. Całkując obustronnie wyrażenia w powyższym równaniu po powierzchni S rozpiętej na zwoju

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4)$$

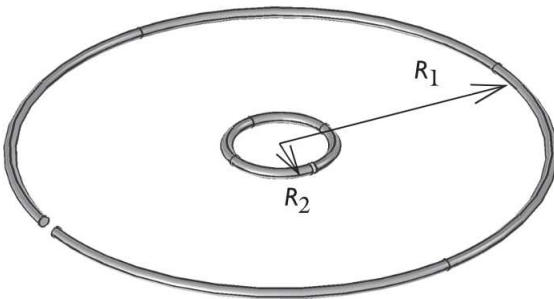
po zastosowaniu twierdzeniu Stokesa do lewej strony równania i wyłączeniu pochodnej po czasie przed całką po prawej stronie

$$\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5)$$

otrzymamy wyrażenie określające siłę elektromotoryczną e , indukowaną w przewodniku l znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym:

$$e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (6)$$

Równanie (6) jest zapisem prawa indukcji elektromagnetycznej Faradaya: siła elektromotoryczna e indukowana w przewodniku jest proporcjonalna do zmian strumienia magnetycznego Φ przenikającego powierzchnię obejmowaną tym przewodnikiem.



Rys. 1: Two concentric coplanar single turn loops of wire. The outer is the primary coil, and has a prescribed current flowing through it. [1]

Rozpatrzmy sytuację, w której dwa współśrodkowe zwoje kołowe położone są w jednej płaszczyźnie (Rys. 1). Pierwszy, o promieniu R_1 jest zasilany prądem przemiennym i indukuje pole magnetyczne. Drugi, mniejszy, o promieniu R_2 znajduje się w polu magnetycznym pierwszego i indukuje się w nim siła elektromotoryczna, która wywołuje prąd, jeśli końce zwoju są połączone.

Ze zwojami (cewkami) sprzężonymi magnetycznie wiąże się indukcyjność wzajemna. Można ją wyznaczyć analitycznie, w przybliżeniu, ale z dość dużą dokładnością, przy założeniu, że $R_1 \gg R_2 \gg r_{\text{wire}}$ (r_{wire} – promień przewodu). Indukcję magnetyczną wewnątrz zwoju drugiego możemy w takim przypadku traktować jako stałą, wyrażoną równaniem (2). Strumień Φ przenikający powierzchnię S , której brzegiem jest zwój wyraża się wtedy równaniem:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2R_1} \pi R_2^2. \quad (7)$$

Indukcyjność wzajemną M cewek definiuje się jako współczynnik proporcjonalności między prądem I , a strumieniem magnetycznym Φ skojarzonym z drugą cewką, a wytwarzanym przez pierwszą:

$$\begin{aligned} \Phi &= MI = \frac{\mu_0 I}{2R_1} \pi R_2^2 \\ M &= \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dokładną wartość indukcyjności M można obliczyć znajdując dokładne wartości indukcji B , a z niej – przez całkowanie po powierzchni S – dokładną wartość strumienia magnetycznego:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S B_z dS \\ M &= \frac{\int_S B_z dS}{I}. \end{aligned} \quad (9)$$

Wprowadzając do równania (9) wektorowy potencjał magnetyczny \mathbf{A} definiowany równaniem $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ otrzymamy jeszcze jedną zależność na indukcyjność wzajemną. Po zastosowaniu twierdzenia Stokesa uwzględniamy jedyną niezerową składową wektora A_φ . Ponieważ wartość potencjału A_φ zmienia się w przekroju S_{wire} przewodu, konieczne jest jeszcze całkowanie po tym przekroju. Ostatecznie otrzymamy:

$$M = \int_{S_{\text{wire}}} \frac{2\pi r A_\varphi dS_{\text{wire}}}{I \pi r_{\text{wire}}^2} = \frac{2}{I r_{\text{wire}}^2} \int_{S_{\text{wire}}} A_\varphi r dS_{\text{wire}}. \quad (10)$$

Indukcyjność wzajemną M cewek można też obliczyć z zależności znanej z teorii obwodów elektrycznych, na podstawie znajomości napięcia U na drugiej cewce i prądu I w cewce pierwszej:

$$M = \frac{U}{j\omega I}. \quad (11)$$

Powyższe zależności zweryfikujemy za pomocą modelu numerycznego, który zbudujemy w programie COMSOL Multiphysics.

Literatura

1. Pomoc do programu COMSOL Multiphysics:

ACDC_Module/Inductive_Devices_and_Coils/mutual_inductance

Zadanie

Oblicz indukcyjność wzajemną współosiowych zwojów kołowych (umieszczonych względem siebie tak jak pokazano na Rys. 1) o następujących parametrach:

promień przewodu $r_{\text{wire}} = 1$ mm,

promień zewnętrznego zwoju $R_1 = 100$ mm,

promień wewnętrznego zwoju $R_2 = 10$ mm.

Porównaj wyniki obliczania indukcyjności na podstawie wzorów (8-11). Do obliczeń wykorzystaj model zbudowany w programie COMSOL Multiphysics 4.4.

Wykonaj obliczenia dla następujących modeli:

- 1) zwoj zewnętrzny zasilany prądem stałym,
- 2) zwoj zewnętrzny zasilany prądem przemiennym, zwoj wewnętrzny otwarty (indukuje się w nim siła elektromotoryczna, zerowy prąd w zwoju),
- 3) zwoj zewnętrzny zasilany prądem przemiennym, zwoj wewnętrzny zwarty (indukuje się w nim siła elektromotoryczna, a pod jej wpływem indukuje się prąd). Oblicz wartość prądu indukowanego w mniejszym zwoju.