gdzie:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i + Y_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(X_i + X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(X_i + X_j)^2 + (Y_i + Y_j)^2}} \qquad i \neq j \tag{36}$$

oraz:

$$A_{ii} = 4M \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2Y_i} + \frac{1}{2X_i} + \frac{1}{2\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}}, \qquad i = j\,. \tag{37}$$

Gęstość powierzchniowa ładunku:

$$\sigma_i = 4\pi\varepsilon \frac{M^2}{a} w_i\,, \tag{38}$$

a pojemność odosobnionej płytki kwadratowej:

$$C = 16\pi\varepsilon a \sum_{i=1}^{N} w_i\,. \tag{39}$$

Porównując otrzymany wynik ze wzorem (21) można po rozwiązaniu układu równań (38) wyznaczyć wartość współczynnika α:

$$\alpha = 2\pi \sum_{i=1}^{N} w_i \tag{40}$$

który, zgodnie z wzorem (20), powinien być zawarty w przedziale (1,128; 1,414).

6. Kondensator płaski z kwadratowymi okładkami

Postępując podobnie jak w punkcie 4.2 i korzystając z symetrii układu otrzymuje się następujący układ równań:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i A_{ij}^{(1)} = 1\,, \tag{41}$$

gdzie:

$$A_{ij}^{(1)} = A_{ij} - \frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + \left(\frac{d}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i + Y_j)^2 + \left(\frac{d}{a}\right)^2}} + - \frac{1}{\sqrt{(X_i + X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + \left(\frac{d}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(X_i + X_j)^2 + (Y_i + Y_j)^2 + \left(\frac{d}{a}\right)^2}}\,. \tag{42}$$

Pojemność kondensatora wyraża się wzorem:

$$C = 8\pi\varepsilon a \sum_{i=1}^{N} w_i\,. \tag{43}$$

Obliczanie pojemności kondensatora płaskiego

Przegląd przybliżonych metod wyznaczania pojemności kondensatora płaskiego

1. Założenie nieskończonej rozległości okładek kondensatora

Najprostszym sposobem wyznaczania pojemności kondensatora płaskiego jest metoda oparta na założeniu, że pole elektrostatyczne wewnątrz kondensatora jest w przybliżeniu takie samo jak w układzie dwóch nieskończenie rozległych płyt. Wówczas korzystając z prawa Gaussa lub rozwiązując jednowymiarowe równanie Laplace'a otrzymuje się dobrze znany wzór:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}\,, \tag{1}$$

gdzie S jest powierzchnią okładki, a d odległością między okładkami.

Wzór ten jest wystarczająco dokładny, gdy $d << \sqrt{S}$. W przeciwnym przypadku należy uwzględnić efekty krańcowe, tzn. skomplikowany i trudny do wyznaczenia rozkład pola w okolicy brzegu kondensatora.

2. Związek pojemności kondensatora z pojemnością odosobnionej okładki

Pojemność odosobnionego przewodnika w kształcie płytki o dowolnym kształcie może być oszacowana w oparciu o jego wymiary geometryczne. Celowe jest zatem wyznaczenie przybliżonych zależności między pojemnością kondensatora składającego się z dwóch równoległych okładek o dowolnym kształcie, a pojemnością odosobnionej okładki. Przyjmujemy oznaczenia: C_0 na pojemność odosobnionej okładki oraz a na połowę maksymalnego wymiaru okładki. Stosuje się następujące przybliżenia:

$$C \approx \frac{C_0}{2 - \frac{C_0}{2\pi\varepsilon d}} \tag{2}$$

dla przypadku, gdy $\frac{a}{d} < 0{,}2$ oraz:

$$C \approx \frac{\varepsilon S}{d} + \frac{1}{2} C_0 \tag{3}$$

dla przypadku, gdy $\frac{a}{d} > 0{,}2$.

Wzór (2) uzyskano stosując założenie, że potencjał każdej z okładek może być wyznaczony jako suma potencjału pochodzącego od ładunków zgromadzonych na tej okładce i potencjału od ładunku punktowego oddalonego o d od okładki:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_0} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon d}\,, \quad V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon d} + \frac{q_2}{C_0}\,. \tag{4}$$

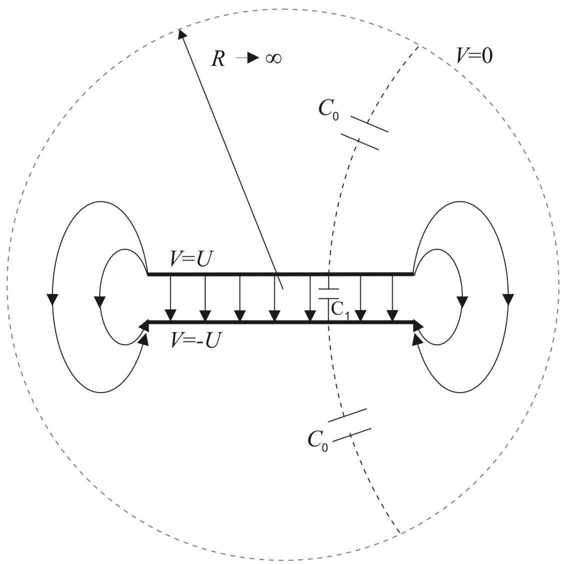
Ponieważ $q_1 = -\,q_2 = Q$, to wzór (2) uzyskamy podstawiając V_1 i V_2 do zależności:

$$C = \frac{Q}{\left|V_1 - V_2\right|}\,. \tag{5}$$

Wzór (2) jest słuszny (w przybliżeniu), jeśli $d >> a$.

Wzór (3) można uzyskać na podstawie następującego rozumowania. Zakłada się, że okładki umieszczone są dostatecznie blisko siebie, aby pole elektryczne można było traktować jako równomierne i co za tym idzie stosować wzór (1). Pole elektryczne występuje jednak również poza obszarem ograniczonym okładkami, w związku z czym istnieją dodatkowe pojemności, związane z każdą z okładek.

Traktując pojemność odosobnionej okładki jako pojemność między okładką, a sferą o nieskończenie wielkim promieniu i potencjale równym zero otrzymujemy układ pojemności przedstawiony na Rys. 1.



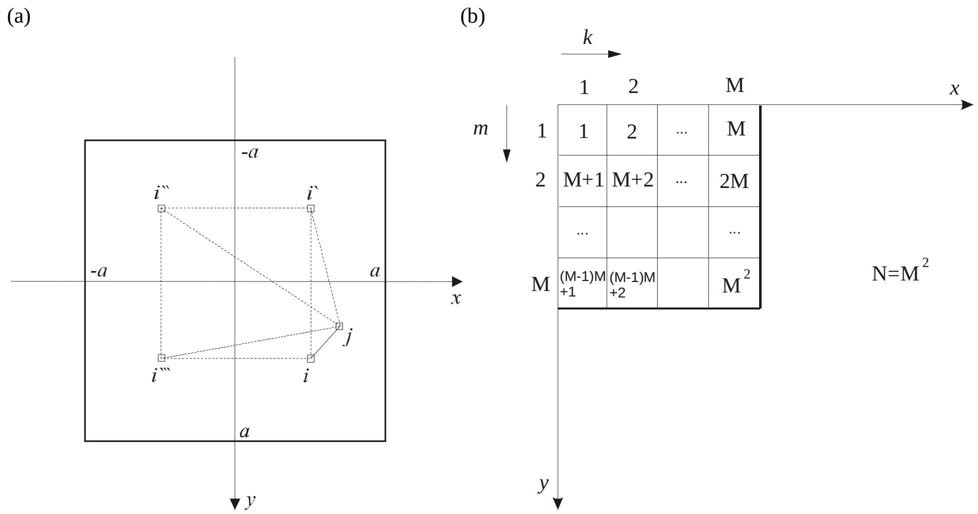
Rys.1 Układ kondensatora i sfery o nieskończenie wielkim promieniu

Wówczas:

$$C \approx C_1 + \frac{1}{2}C_0 = \frac{\varepsilon S}{d} + \frac{1}{2}C_0\,. \tag{6}$$

5. Pojemność odosobnionej płytki kwadratowej:

Na rys. 3 przedstawiono płytkę kwadratową o boku $2a$. Korzystając z symetrii względem osi x oraz osi y można rozważać tylko ¼ powierzchni płytki.



Rys.3 (a) Płytka kwadratowa o boku $2a$; (b) podzielona na elementy część płytki

Niech $\Delta x = \Delta y = \dfrac{a}{M}$. Ponumerujmy elementy powierzchni tak, jak na rys. 3b. Wówczas $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y = \dfrac{a^2}{M^2} = \dfrac{a^2}{N}$, a współrzędne środków poszczególnych elementów:

$$x_i = aX_i = x(k + (m-1)M) = (k - 0{,}5)\frac{a}{M}$$

$$y_i = aY_i = y(k + (m-1)M) = (m - 0{,}5)\frac{a}{M} \tag{34}$$

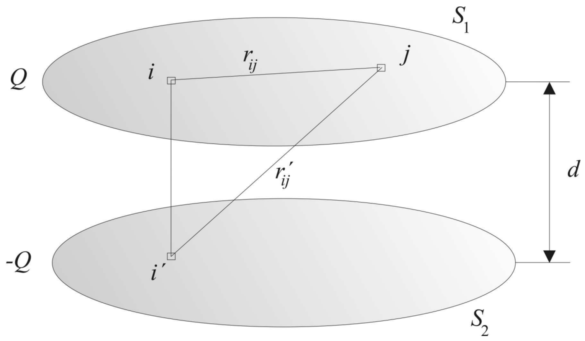
$$k,\ m = 1, 2, ..., M, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Układ równań (26) można przedstawić w postaci:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i A_{ij} = 1\,, \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{35}$$

4.2 Pojemność kondensatora płaskiego

W przypadku obliczania pojemności kondensatora płaskiego złożonego z dwóch jednakowych okładek o powierzchni S i odległych jedna od drugiej o d można skorzystać z symetrii układu (rys.2)



Rys.2 Okładki kondensatora płaskiego

$$r'_{ij} = \sqrt{(r_{ij})^2 + d^2}\ . \tag{28}$$

Potencjał na powierzchni S_1:

$$V_{S_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S_1} \sigma(P')\left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{r'_{ij}}\right) dP'\,, \tag{29}$$

a na powierzchni S_2:

$$V_{S_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S_1} \sigma(P')\left(\frac{1}{r'_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}}\right) dP' = -V_{S_1}\ . \tag{30}$$

Wystarczy zatem rozwiązać równanie całkowe (29).

Postępując podobnie jak w punkcie poprzednim i zakładając $V_{S_1}(P) = 1$, $(P \in S)$ otrzymujemy układ równań:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i a_{ij}^{(1)} = \frac{4\pi\varepsilon N}{S} \tag{31}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{1}{\sqrt{r_{ij}^2 + d^2}} \tag{32}$$

Pojemność kondensatora:

$$C = \frac{Q}{2V_{S_1}} = \frac{S}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \tag{33}$$

3. Pojemność odosobnionej okładki

W sposób dokładny można wyznaczyć pojemność płytki w kształcie tarczy kołowej o promieniu R. W tym celu wyznacza się współrzędne sferoidy spłaszczonej (η,θ,ψ) związane ze współrzędnymi prostokątnymi za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} x &= R\,\mathrm{ch}\eta\,\sin\theta\,\cos\psi \\ y &= R\,\mathrm{ch}\eta\,\sin\theta\,\sin\psi \\ z &= R\,\mathrm{sh}\eta\,\cos\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Powierzchnie η = const są sferoidami spłaszczonymi:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \tag{8}$$

gdzie: $b = R\,\mathrm{ch}\eta$, $c = R\,\mathrm{sh}\eta$

Parametr η zmienia się od 0 do ∞, θ od 0 do π, ψ od 0 do 2π.

Dla $\eta = 0$ sferoida degeneruje się do koła o promieniu R. Współrzędne metryki w tym układzie współrzędnych mają postać:

$$\begin{aligned} h_\eta &= R\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\theta} \\ h_\theta &= R\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \sin^2\theta} \\ h_\psi &= R\,\mathrm{ch}\eta\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ze względu na symetrię układu potencjał na zewnątrz tarczy jest funkcją jednej współrzędnej η i równanie Laplace`a można zapisać w postaci:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \mathrm{th}\,\eta\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0\,. \tag{10}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$V(\eta) = A + B\cdot \mathrm{arcctg}(\mathrm{sh}\,\eta)\,. \tag{11}$$

Po spełnieniu warunków brzegowych $V(0) = U$ i $V(\infty) = 0$ otrzymujemy:

$$A = 0,\ \ B = \frac{2U}{\pi}\,. \tag{12}$$

Gęstość powierzchniowa ładunku:

$$\sigma = D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\vec{1}_\eta}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \frac{2U}{\pi}\frac{\varepsilon}{R\sqrt{1-\sin^2\theta}} \tag{13}$$

Całkowity ładunek:

$$Q = \int_S \sigma dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sigma(\theta,\psi) h_\eta h_\theta \right]\Big|_{\eta=0} \mathrm{d}\psi\, \mathrm{d}\theta = 8\varepsilon R U \tag{14}$$

Pojemność tarczy o promieniu R wynosi:

$$C = 8\varepsilon R. \tag{15}$$

Wzór (15) stanowi podstawę do szacowania pojemności płytek o innych kształtach. Zauważmy, że pojemność całego przewodnika jest większa od pojemności jego części. Zatem pojemność odosobnionej okładki o dowolnym kształcie wyraża się:

$$8\varepsilon R_w \le C_0 \le 8\varepsilon R_o \,, \tag{16}$$

gdzie R_w jest promieniem koła wpisanego w powierzchnię okładki, a R_o - promieniem okręgu opisanego. Na przykład dla okładki kwadratowej o boku $2a$ zachodzi:

$$8\varepsilon a \le C_0 \le 8\varepsilon\sqrt{2}a \;. \tag{17}$$

Ponadto można udowodnić, że spośród okładek o tym samym polu powierzchni najmniejszą pojemność ma okładka w kształcie koła. Zatem pojemność okładki o dowolnym kształcie:

$$C_0 \ge 8\varepsilon\sqrt{\frac{S}{\pi}} \;. \tag{18}$$

Dla kwadratu o boku $2a$ otrzymujemy więc oszacowanie:

$$8\varepsilon a\sqrt{\frac{4}{\pi}} \le C_0 \le 8\varepsilon a\sqrt{2} \tag{19}$$

lub

$$1{,}128 \le \frac{C_0}{8\varepsilon a} \le 1{,}414 \tag{20}$$

Ostatecznie pojemność płytki kwadratowej oblicza się ze wzoru:

$$C_0 = \alpha 8\varepsilon a \;. \tag{21}$$

W punkcie 5 pokażemy jeden ze sposobów dokładniejszego wyznaczenia parametru α.

4. Metoda równań całkowych pierwszego rodzaju.

4.1 Przewodnik odosobniony.

Potencjał w dowolnym punkcie P można obliczyć jeśli znany jest rozkład ładunków na powierzchni przewodnika:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(P')}{r(P,P')} dP' \tag{22}$$

W rzeczywistości znany jest potencjał przewodnika. Przyjmując, że punkty P leżą na powierzchni S i $V(P) = 1$ otrzymujemy równanie całkowe, z którego wyznacza się rozkład gęstości powierzchniowej ładunku $\sigma(P')$. Równanie to rozwiązuje się w sposób przybliżony dzieląc powierzchnię S na N elementów powierzchni ΔS_i i zakładając, że funkcja $\sigma(P')$ zmienia się nieznacznie na każdym z elementów. Wówczas:

$$4\pi\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i a_{ij} \Delta S_i \,, \quad j = 1, 2, ..., N \tag{23}$$

gdzie σ_i jest wartością gęstości powierzchniowej ładunku w i-tym elemencie, a a_{ij}:

$$a_{ij} = \frac{1}{\Delta S_i}\int_{S_i} \frac{\mathrm{d}S_i}{r_{ij}} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{r_{ij}} & i \ne j \\ \dfrac{1}{\Delta S_i}\displaystyle\int_{S_i} \frac{\mathrm{d}S_i}{r_{ii}} & i = j \end{cases} \tag{24}$$

r_{ij} oznacza odległość między środkiem elementu j-tego, a dowolnym punktem elementu i-tego.

Największą trudność sprawia obliczenie współczynników a_{ii} z uwagi na osobliwość występującą pod całką. Obliczymy ten współczynnik przy założeniu, że element powierzchni jest prostokątem o wymiarach Δx, Δy. Wówczas:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_i-\frac{\Delta y}{2}}^{y_i+\frac{\Delta y}{2}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}}\int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}} = \\ &= 2\left[\frac{1}{\Delta y}\ln\frac{\Delta y+\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{\Delta x+\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta y}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Jeżeli elementy powierzchni są jednakowe, to $\Delta S_i = \dfrac{S}{N}$ i równanie (23) przybiera postać:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i a_{ij} = \frac{4\pi\varepsilon N}{S} \,, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{26}$$

Pojemność przewodnika:

$$C = \frac{Q}{V} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \Delta S_i = \frac{S}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \,, \tag{27}$$

gdzie σ_i są rozwiązaniami układu równań (26).