Linia dwuprzewodowa

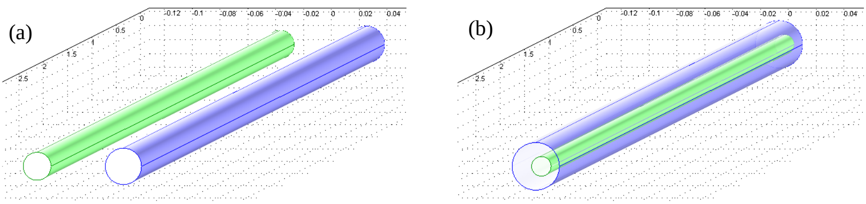
Obliczanie pojemności linii dwuprzewodowej

1. Wstęp

Pojemność kondensatora można obliczyć w prosty sposób znając wartości zgromadzonego na nim ładunku i napięcia między okładkami:

$$C = \frac{Q}{U}\,. \tag{1}$$

Skorzystamy z tej zależności, aby obliczyć pojemność linii dwuprzewodowej. Okładkami kondensatora będą w takim przypadku przewody, o których założymy że są nieskończenie długie, mają przekrój kołowy i są równoległe do siebie (Rys. 1a).



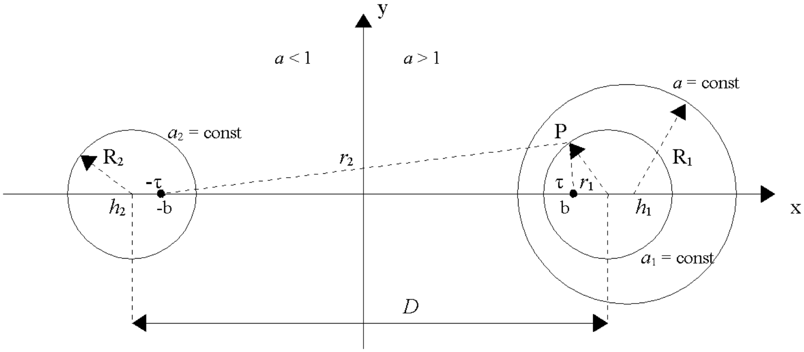
Rys. 1 Linia dwuprzewodowa (a) oraz kabel z powłoką przewodzącą (b)

Ponieważ pojemność zależy tylko od geometrii linii, możemy umieścić na niej dowolny ładunek, obliczyć wytwarzany przez niego na każdym przewodzie potencjał, a następnie napięcie – jako różnicę potencjałów (V_1 – V_2) między przewodami. Jako że rozpatrujemy linię nieskończenie długą, to będziemy się posługiwać nie ładunkiem, lecz gęstością liniową ładunku τ (C/m), a obliczymy wartość względną pojemności C_l – przypadającą na jednostkę długości linii:

$$C_l\left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right] = \frac{C\,[\mathrm{F}]}{l\,[\mathrm{m}]} = \frac{\tau\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]}{V_1 - V_2\,[\mathrm{V}]}\,. \tag{2}$$

2. Pole cienkich osi obdarzonych ładunkiem

W celu wyznaczenia pojemności układu dwóch nieskończenie długich walców rozpatrzymy najpierw pole elektrostatyczne dwóch nieskończonych osi (o zerowym przekroju), na których ładunek rozłożony jest ze stałą gęstością liniową τ i -τ (Rys. 2). Wykażemy, że pole elektryczne takich obdarzonych ładunkiem nieskończenie cienkich osi jest równoważne polu wytworzonemu przez przewody o niezerowych przekrojach.



Rys. 2 Nieskończone osie z równomiernie rozłożonym ładunkiem

Potencjał elektryczny w punkcie P obliczamy jako superpozycję potencjałów pochodzących od obu osi i możemy wyrazić go wzorem:

$$V\left(P\right)=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r_1+\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln a\ , \tag{3}$$

gdzie r_1 i r_2 są odległościami punktu P od osi:

$$r_1=\sqrt{y^2+\left(x-b\right)^2},\qquad r_2=\sqrt{y^2+\left(x+b\right)^2}\ . \tag{4}$$

Linie ekwipotencjalne tworzą punkty, w których $V(P)$ = const. Z równania (3) możemy wyznaczyć zależność, jaką linie te są opisywane :

$$\frac{r_2}{r_1}=a=const \tag{5}$$

i jak łatwo wykazać są one okręgami o równaniu:

$$y^2+\left(x-h\right)^2=R^2\ , \tag{6}$$

gdzie:

$$h=\frac{a^2+1}{a^2-1}b,\qquad R=\frac{2ab}{\left|a^2-1\right|}\ . \tag{7}$$

3. Pole linii dwuprzewodowej

W elektrostatyce powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną. Dla układu złożonego z dwóch przewodów o przekroju kołowym potencjał na powierzchni każdego przewodu również będzie stały. Na powierzchniach przewodów i w ich otoczeniu (na zewnątrz przewodów) potencjał można opisać równaniem (3), czyli takim samym jak dla linii z nieskończenie cienkich, naładowanych osi. Możemy więc tak dobrać położenia osi (parametr b), aby ich pole było równoważne polu przewodów o przekroju kołowym. Linie ekwipotencjalne wyznaczone dla nieskończenie cienkich, naładowanych osi – okręgi pokazane na Rys. 2 – są więc równoważne powierzchniom przewodów o niezerowym przekroju poprzecznym.

Pomiędzy wielkością b charakteryzującą położenie osi elektrycznej a wielkością h charakteryzującą położenie osi geometrycznej powierzchni ekwipotencjalnej zachodzi związek:

$$b^2 = h^2 - R^2 \,. \tag{8}$$

Parametr a, przy którym linie ekwipotencjalne wyznaczają powierzchnie przewodników wyraża się wzorem:

$$a = \sqrt{\frac{h+b}{h-b}} = \frac{R}{|h-b|} = \frac{|h+b|}{R} \,, \tag{9}$$

w którym h i R oznaczają położenie na osi X i promień przewodu. Podstawiając $h = h_1$ i $R = R_1$ oraz $h = h_2$ i $R = R_2$ otrzymamy dwie wartości a – dla dwóch przewodów: $a_1 > 1$, gdy $r_2 > r_1$ (prawa strona na Rys. 2 – dla dodatnich x) oraz $a_2 < 1$, gdy $r_2 < r_1$ (lewa strona na Rys. 2 – dla ujemnych x). Wielkości h_1, h_2 i b wyznacza się z zależności:

$$b^2 = h_1^2 - R_1^2 = h_2^2 - R_2^2 \,, \tag{10}$$

$$h_1 - h_2 = D \qquad (R_1 \geq R_2) \,, \tag{11}$$

gdzie D jest odległością między osiami walców.

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}, \quad h_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2 - D^2}{2D} \,. \tag{12}$$

Pojemność na jednostkę długości układu dwóch walców:

$$C_l = \frac{\tau}{|V_1 - V_2|} = \frac{2\pi\varepsilon}{\left|\ln \frac{a_1}{a_2}\right|} = \frac{2\pi\varepsilon}{\left|\ln\left(\frac{R_1}{R_2} \cdot \left|\frac{h_2 - b}{h_1 - b}\right|\right)\right|} = \frac{2\pi\varepsilon}{\left|\ln\left(\frac{R_2}{R_1} \cdot \left|\frac{h_1 + b}{h_2 + b}\right|\right)\right|} \,. \tag{13}$$

4. Pole kabla niewspółosiowego

Te same zależności można zastosować gdy chcemy obliczyć pojemność jednożyłowego kabla z przewodzącą powłoką (Rys. 1b). Podstawiając we wzorach (12) i (13) wartość D spełniającą warunek:

$$0 \le D < R_1 - R_2 \tag{14}$$

otrzymamy położenia osi geometrycznych przewodów h_1 i h_2 o tym samym znaku (leżące na tej samej połowie osi X) oraz wartość pojemności dla kabla.

5. Przypadki szczególne

Możemy teraz rozpatrywać przypadki szczególne, w których wzór (13) zapiszemy w uproszczonych postaciach.

Linia dwuprzewodowa, o takich samych przewodach:

$$R_1 = R_2 \Rightarrow \qquad h_1 = \frac{D}{2},\ h_2 = -\frac{D}{2} \qquad C_l = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1}\right)}\ ; \tag{15}$$

Kabel koncentryczny (idealnie symetryczny):

$$D = 0 \Rightarrow \qquad h_1, h_2 \to \infty \qquad C_l = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ ; \tag{16}$$

Linia dwuprzewodowa, o przewodach dużo cieńszych niż odległość między przewodami:

$$R_1, R_2 << D \Rightarrow \qquad b \approx \frac{D}{2} \qquad C_l \approx \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}}\ . \tag{17}$$

Ostatni wzór można wyprowadzić zakładając, że oś elektryczna pokrywa się z osią geometryczną przewodu. Wówczas:

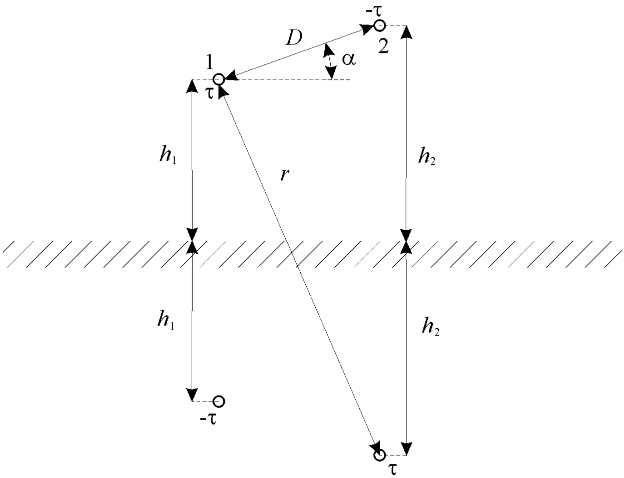
$$V_1 \approx -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln R_1 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln D = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{D}{R_1}, \tag{18}$$

$$V_2 \approx -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln D + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln R_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{D}, \tag{19}$$

$$V_1 - V_2 \approx \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{D^2}{R_1 R_2} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{D}{\sqrt{R_1 R_2}}\ . \tag{20}$$

6. Linia dwuprzewodowa nad ziemią

Pojemność linii dwuprzewodowej zawieszonej nad ziemią można obliczyć stosując metodę odbić zwierciadlanych. Zakładamy, że przewody mają takie same promienie *R*, wielokrotnie mniejsze od odległości między przewodami *D* (Rys. 3).



Rys. 3 Linia dwuprzewodowa zawieszona nad ziemią

Obliczając potencjał dla każdego z przewodów musimy jeszcze uwzględnić przewody „zwierciadlane”:

$$h_1 = h, \qquad h_2 = h + D\sin\alpha\ , \tag{21}$$

$$V_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(-\ln R + \ln 2h_1 + \ln D - \ln r\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2h_1 D}{rR}\ , \tag{22}$$

$$V_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln R - \ln D - \ln 2h_2 + \ln r\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{rR}{2h_2 D}\ . \tag{23}$$

Po przekształceniach otrzymujemy wartość pojemności linii na jednostkę długości:

$$C_l = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{R}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{D}{h}\sin\alpha}{1+\left(\frac{D}{2h}\right)^2+\frac{D}{h}\sin\alpha}}\right)}\ . \tag{24}$$

Literatura

1. Ryszard Sikora, **Teoria Pola Elektromagnetycznego**, *Wydawnictwa Naukowo-Techniczne*, 1997, wydanie trzecie zmienione, str. 83–119

2. Maciej Krakowski, **Elektrotechnika Teoretyczna t.2**, *Wydawnictwa Naukowe PWN*, 1999, wydanie szóste, str. 52–55, 58–59, 65–69

3. David J. Griffiths, **Podstawy Elektrodynamiki**, *Wydawnictwa Naukowe PWN*, 2001 wydanie pierwsze, str. 120–133, 146–152

4. Markus Zahn, **Pole Elektromagnetyczne**, *Państwowe Wydawnictwo Naukowe*, 1989, str. 68–77, 104–113

Równania (13), (16) i (24) jako funkcje w języku MATLAB

równanie (13)

```
function [C,a1,a2,h1,h2,b] = r13(D,R1,R2,epsilon)

h1 = (D.^2+R1.^2-R2.^2)./2./D;
h2 = (-D.^2+R1.^2-R2.^2)./2./D;
b  = sqrt(h1.^2 - R1.^2);
a1 = abs(b+h1)./R1;
a2 = abs(b+h2)./R2;

C = abs(2*pi*epsilon/log(a1/a2));
```

równanie (16)

```
function C = r16(D,R1,R2,epsilon)

C = abs(2*pi*epsilon./log(R1./R2));
```

równanie (24)

```
function C = r24(D,R,h,alfa,epsilon)

C = abs(...
   pi*epsilon...
   ./(log(D./R)...
   .*sqrt((1+D./h.*sin(alfa))...
   ./(1+(D./2./h).^2+(D./h).*sin(alfa)))));
```

Zadania

Używając funkcji `em1_linia2p` należy rozwiązać przedstawione poniżej zadania. Na podstawie wprowadzonych danych wejściowych funkcja rozpoznaje, który przypadek jest rozpatrywany i oblicza pojemność linii na jednostkę długości. Rozwiązując zadanie 1 i 2 należy podać przy wywołaniu funkcji: odległość *D* między osiami przewodów (lub między osiami żyły i powłoki) oraz promienie R_1 i R_2 przewodów (lub odpowiednio promień żyły i promień powłoki):

```
C = em1_linia2p(D,R1,R2);
```

Rozwiązując zadanie 3 należy wprowadzić: odległość *D* między osiami przewodów, promień *R* (jednakowy dla obu przewodów), wysokość *h* zawieszenia linii nad ziemią oraz kąt α opisujący rozmieszczenie przewodów (wyrażony w radianach):

```
C = em1_linia2p(D,R,h,alfa);
```

Wprowadzenie nieprawidłowych danych powoduje wyświetlenie komunikatu o błędzie. Pojawia się on, gdy z podanych wartości (*D*, R_1 i R_2) lub (*D*, *R*, *h*, i α) nie można stworzyć prawidłowej geometrii linii. Podanie prawidłowych wartości powoduje wyświetlenie rysunku przedstawiającego geometrię linii oraz wyniki. Jako dane należy wprowadzać tylko liczby, które są rozumiane jako wartości odpowiednich parametrów wyrażone w jednostkach SI. Dane należy wprowadzać w takiej kolejności, w jakiej przedstawiono je powyżej.

1) Linia dwuprzewodowa

a) Dla danych wartości R_1, R_2, i *D* obliczyć dokładną (z funkcji `em1_linia2p`) i przybliżoną (z wzoru 17) wartość pojemności układu.
Dane: $D = 20$ **mm** $R_1 = 1{,}5$ **mm** $R_2 = 3{,}5$ **mm**

b) Obliczyć pojemności (dokładną i przybliżoną) dla kilku innych (większych) wartości *D*.

c) Obliczyć pojemności (dokładną i przybliżoną) dla kilku innych wartości R_1.

Dla wyników uzyskanych w punktach *a*, *b* i *c* wyznaczyć błąd jaki popełniamy korzystając ze wzoru przybliżonego (17) zamiast dokładnego (13) – wyznaczyć błąd względny obliczania pojemności i wyrazić go w procentach.

2) Kabel niewspółosiowy

a) Dla danych wartości R_1, R_2, i D obliczyć dokładną (z funkcji `em1_linia2p`) i przybliżoną (z wzoru 16) wartość pojemności układu.

Dane: $\boldsymbol{D}$ **= 0,2 mm** $\boldsymbol{R_1}$ **= 2 mm** $\boldsymbol{R_2}$ **= 30 mm**

b) Obliczyć pojemności (dokładną i przybliżoną) dla kilku innych (większych) wartości D.

c) Obliczyć pojemności (dokładną i przybliżoną) dla kilku innych wartości R_1.

Dla wyników uzyskanych w punktach *a*, *b* i *c* wyznaczyć błąd obliczania pojemności jaki popełniamy korzystając ze wzoru przybliżonego (16) zamiast dokładnego (13). Określić kiedy możemy korzystać ze wzoru przybliżonego. Dla jakiego przypadku stosując ten wzór otrzymujemy dokładne wyniki?

3) Linia dwuprzewodowa zawieszona nad ziemią

a) Dla danych wartości R, D, h i α obliczyć pojemność linii (korzystając z funkcji `em1_linia2p`).

Dane: $\boldsymbol{D}$ **= 15 mm** $\boldsymbol{R}$ **= 2 mm** $\boldsymbol{h}$ **= 2,5 mm** $\boldsymbol{\alpha = \pi/6}$

b) Zbadać jaki wpływ na pojemność wywiera wysokość h zawieszenia linii nad ziemią oraz rozmieszczenie przewodów (α).

c) Jaki błąd jest popełniany, jeżeli nie uwzględnia się wpływu ziemi na pojemność linii dwuprzewodowej?

W sprawozdaniu z ćwiczenia należy umieścić wyniki wszystkich przeprowadzonych obliczeń (pojemności dokładnej i przybliżonej, błędu popełnianego przy korzystaniu z wzoru przybliżonego zamiast dokładnego) zebrane w tabelach i przedstawione na wykresach. Sprawozdanie musi również zawierać wnioski (na podstawie wyników).